Dimension de Vapnik-Chervonenkis

Exercice 1

Soit K vecteurs $\mathbf{z} = (z_k)_{1\leq k\leq K}$, avec $z_k = (x_k,y_k)$ où $x_k \in \mathbb{R}^d$ et $y_k \in \{0,1\}$. On définit la fonction $g_{\mathbf{z}}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\{0,1\}$ par

$$g_{\mathbf{z}}(x) = y_{\arg\min_{1\leq k\leq K} \|x_k - x\|}.$$

On considère la classe de fonctions $\mathcal{G}_K$ définie comme

$$\mathcal{G}_K = \{g : \mathbb{R}^d \to \{0,1\} | \exists \mathbf{z}\ g = g_{\mathbf{z}}\}.$$

Question 1 Montrez que $VC(\mathcal{G}_K) \geq K$.

Question 2 Montrez que pour $d = 1$, $VC(\mathcal{G}_K) = K$.

Exercice 2

On considère la classe $\mathcal{F}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$ de la forme $f_{a,b} = \mathbb{I}_{]a,b]}$. Montrez que

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$