L3 MIASHS/MIAGE **Année universitaire 2015–2016**
Université Paris 1

Contrôle continu : automates finis
Sujet 1

Exercice 1

Soit un automate A défini par $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ avec

$$Q = \{0, 1, 2, 3\} \qquad \Sigma = \{a, b\}$$
$$q_0 = 0 \qquad F = \{3\},$$

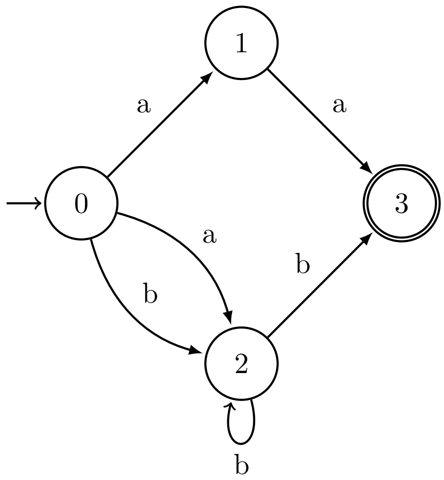
et par les tables suivantes pour δ :

q	t	q'
0	a	1
0	a	2
0	b	2

q	t	q'
1	a	3
2	b	2
2	b	3

Question 1 Dessinez l'automate.

Correction



Question 2 Donnez un mot reconnu par l'automate le plus court possible.

Correction

Le mot aa est reconnu par l'automate.

Question 3 Donnez un exemple de mot non reconnu par l'automate.

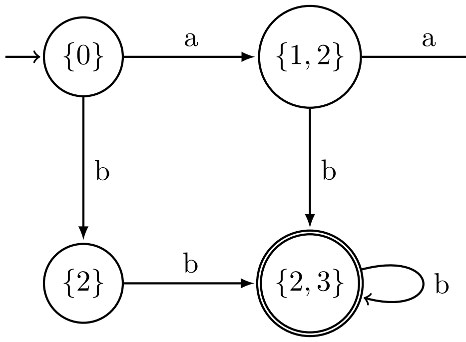
Correction

Le mot aaa n'est pas reconnu par l'automate.

Question 4 Construisez par la méthode de votre choix un automate B déterministe et équivalent à A. Vous donnerez la représentation graphique de B et sa représentation formelle.

Correction

On utilise l'algorithme classique en construisant les états au fur et à mesure de la progression, pour éviter d'avoir à construire 16 états.



La définition de formelle de B est $B = (Q', \Sigma, q'_0, \delta', F')$ avec

$$Q' = \{\{0\}, \{1,2\}, \{2\}, \{2,3\}, \{3\}\} \qquad \Sigma = \{a, b\}$$
$$q'_0 = \{0\} \qquad F = \{\{2,3\}, \{3\}\},$$

et par la table suivante pour δ' :

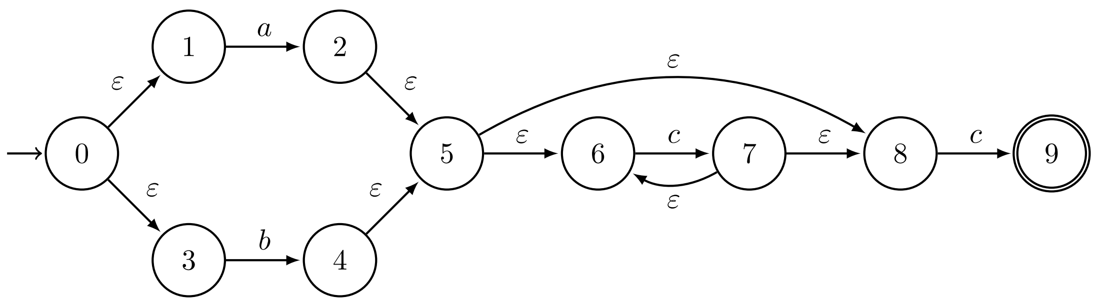
q	t	q'
$\{0\}$	a	$\{1,2\}$
$\{0\}$	b	$\{2\}$
$\{1,2\}$	a	$\{3\}$
$\{1,2\}$	b	$\{2,3\}$
$\{2\}$	b	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	b	$\{2,3\}$

Exercice 2

On étudie le langage rationnel $L = (a|b)(c*)c$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Question 1 Appliquez l'algorithme de Thompson pour obtenir un automate A reconnaissant L. Attention, vous ne devez pas simplifier l'automate pendant sa construction !

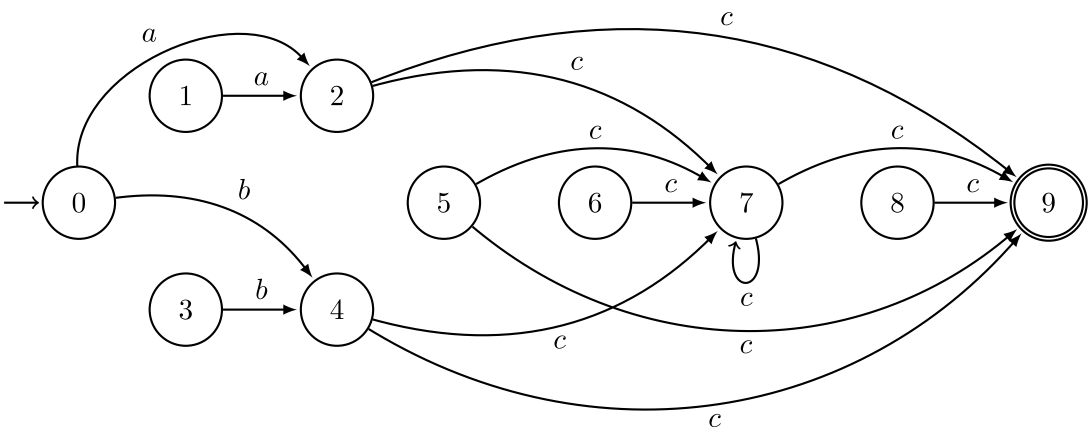
Correction



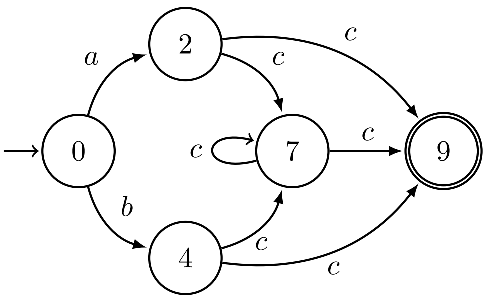
Question 2 Construisez un automate B synchrone (sans ε-transitions) équivalent à A en appliquant l'algorithme *backward* à A. Veillez à simplifier B en supprimant les états non atteignables.

Correction

On procède en deux temps, d'abord la suppression des ε-transitions, ce qui donne l'automate suivant :



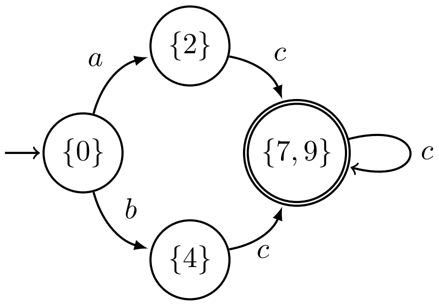
On supprime ensuite les états non atteignables, ce qui donne l'automate suivant :



Question 3 Construisez un automate C déterministe équivalent à B par la méthode de votre choix appliquée à B. Indiquez distinctement la composition des états de C en fonction des états de B.

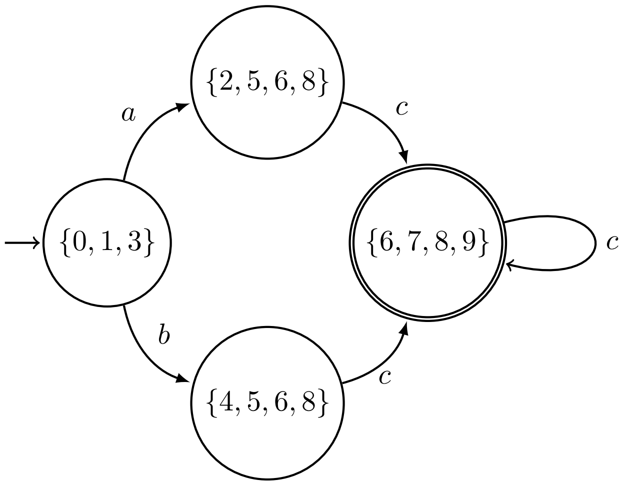
Correction

On utilise l'algorithme classique en construisant les états au fur et à mesure de la progression, pour éviter d'avoir à construire 32 états.



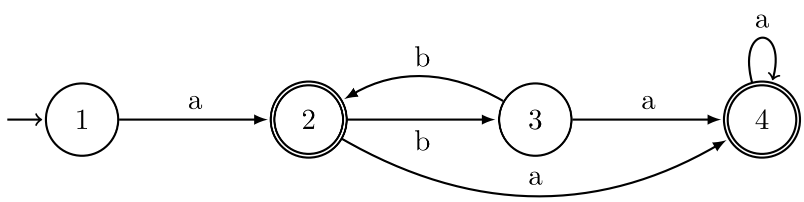
Question 4 Construisez un automate D déterministe équivalent à A en déterminisant directement A (algorithme *forward*). Indiquez distinctement la composition des états de D en fonction des états de A.

Correction



Exercice 3

Soit l'automate suivant défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



Question 1 Déterminez les équations satisfaites par les $(X_q)_{q \in \{1,2,3,4\}}$.

Correction

On a

$$
\begin{aligned}
X_1 &= aX_2, \\
X_2 &= \varepsilon | bX_3 | aX_4, \\
X_3 &= bX_2 | aX_4, \\
X_4 &= \varepsilon | aX_4.
\end{aligned}
$$

Question 2 Déterminez explicitement X_1 par une expression qui ne fasse intervenir aucun des X_q.

Correction

On appliquer le lemme d'Arden à X_4, ce qui donne $X_4 = (a*)\varepsilon$, c'est-à-dire $X_4 = (a*)$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \varepsilon | bX_3 | (a+), \\
X_3 &= bX_2 | (a+).
\end{aligned}
$$

En substituant X_3 dans l'équation satisfaire par X_2, on trouve

$$X_2 = \varepsilon | bbX_2 | b(a+) | (a+)$$

ce qui donne, en appliquant de nouveau le lemme d'Arden

$$X_2 = ((bb)*)\big(\varepsilon | b(a+) | (a+)\big),$$

et finalement

$$X_1 = a((bb)*)\big(\varepsilon | b(a+) | (a+)\big).$$