Contrôle continu : automates

Sujet 1

Rappel de notations

Dans les exercices qui suivent, on note

- $a, b, c, \ldots$ des symboles de l'alphabet considéré, Σ ;
- Σ^* l'ensemble de tous les mots formés des symboles de Σ, en incluant notamment le mot vide ε ;
- si L et M sont des langages (des sous-ensembles de Σ^*) :
  - $L.M = LM$ est l'ensemble des mots constitués d'un mot de L suivi d'un mot de M ;
  - $L|M = L \cup M$ est l'union des langages, c'est-à-dire l'ensemble des mots soit dans L soit dans M ;
- si L est un langage :
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$;
  - $L^1 = L$;
  - $L^{k+1} = L.L^k = L^k.L$;
  - $L^+ = \bigcup_{k \geq 1} L^k$;
  - $L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k$.
- pour tout mot $w \in \Sigma^*$, on note par simplification w le langage réduit au mot w seul, c'est-à-dire le langage $L = \{w\}$.

Exercice 1

Soit le langage $L = \{a\}.(\{b\}^*) = a(b^*)$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

1. Dessiner l'automate le plus simple possible reconnaissant L.
2. Donner la définition formelle de cet automate (ensemble des états, relation de transition, etc.).
3. Dessiner une version complétée de l'automate. On rappelle qu'un automate complet est telle que pour chaque état et pour chaque symbole de l'alphabet, il existe une transition étiquetée par le symbole depuis cet état vers un autre état. En d'autres termes, un automate complet ne se bloque jamais.

Exercice 2

Dessiner un automate déterministe reconnaissant le langage $L = b(a|c)(a+)$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

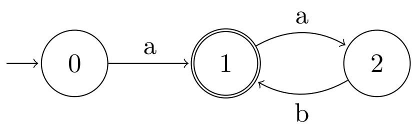
Exercice 3

Dessiner un automate déterministe reconnaissant les mots sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ contenant au moins une fois le mot *ab*. L'automate doit reconnaître par exemple *caabbc* mais pas *baacba*.

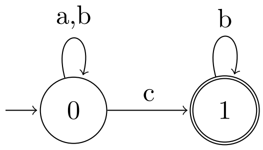
Exercice 4

Dessiner un automate déterministe reconnaissant les mots de longueur divisible par 3 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

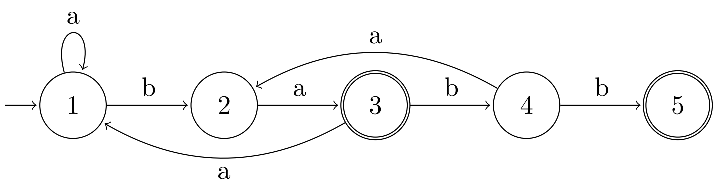
Exercice 5
Déterminer le langage reconnu par l'automate suivant en le décrivant par une expression rationnelle :



Exercice 6
Déterminer le langage reconnu par l'automate suivant en le décrivant par une expression rationnelle :



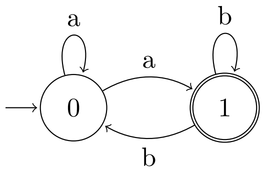
Exercice 7
On considère l'automate suivant :



On rappelle que X_i désigne le langage reconnu par l'automate en considérant i comme l'état initial. Dans l'automate ci-dessus, X_1 est donc le véritable langage reconnu.

1. Déterminer les équations satisfaites par les $(X_i)_{1\leq i\leq 5}$. On a par exemple $X_4 = bX_5|aX_2$.
2. Effectuer des substitutions appropriées de manière à exprimer X_2 uniquement en fonction de X_1 et X_2 lui-même.
3. Appliquer le lemme de Arden pour exprimer X_2 en fonction de X_1 uniquement (On rappelle que l'unique solution de $X = \alpha X|\beta$ est $X = \alpha^*\beta$ si $\varepsilon \notin \alpha$).
4. Appliquer une nouvelle dois le lemme de Arden pour trouver X_1 sous forme d'une expression rationnelle.

Exercice 8
On considère l'automate non déterministe suivant :



1. Pourquoi dit-on que l'automate n'est pas déterministe ?
2. Construire un automate déterministe reconnaissant exactement le même langage que l'automate proposé.
3. En utilisant les équations associées à l'automate déterministe et le lemme de Arden, déterminer le langage reconnu par l'automate sous forme d'une expression rationnelle simple.