L2/L3 MASS/MIAGE **Année universitaire 2014–2015**
Université Paris 1

Contrôle continu : calcul propositionnel
Sujet 1

Pour faciliter la lecture des formules, cet énoncé utilise les symboles [ ] et { } à la place des parenthèses. Par exemple, on considère la formule $[a \wedge (\neg b)]$ comme équivalente syntaxiquement à $(a \wedge (\neg b))$.

Exercice 1

On considère la formule suivante

$$F \equiv \big(\{[a \wedge (\neg c)] \vee (b \wedge a)\} \Rightarrow [(\neg a) \wedge b]\big)$$

Question 1 Dessiner l'arbre de la formule.

Question 2 Donner toutes les valuations possible de la formule en utilisant la technique de la table de vérité.

Question 3 Donner la nature de la formule (statisfiable, tautologique ou inconsistante), en justifiant brièvement votre réponse.

Question 4 Mettre la formule sous les deux formes normales possibles en utilisant la table de vérité calculée précédemment.

Question 5 Mettre la formule sous une des deux formes normales (au choix) en utilisant les équivalences notables (il arrive souvent d'obtenir une forme différente de celle qu'on obtient au moyen de la table de vérité).

Exercice 2

Étudier la nature de la formule suivante en appliquant l'algorithme de Quine **sans** les équivalences notables :

$$\big(\{[(\neg d) \wedge (a \Rightarrow b)] \vee [(a \Rightarrow c) \wedge d]\} \Rightarrow (a \Rightarrow \{(c \wedge d) \vee [b \wedge (\neg d)]\})\big)$$

Attention, pour la simplification des formules il faut **impérativement** se limiter aux règles de Quine faisant apparaître $\top$ et $\bot$, même pour des cas triviaux. Par exemple, on ne peut pas simplifier directement $(a \vee (\neg a))$ en $\top$.

Exercice 3

En utilisant le calcul des séquents **sans** les équivalences notables, étudier la nature de la formule suivante :

$$\big[\{a \Rightarrow [b \vee (\neg c)]\} \Rightarrow \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \Rightarrow (\neg a)\big)\big]$$

Comme dans l'exercice précédent, aucune simplification des formules n'est permise en dehors des transformations autorisées dans le calcul des séquents.

1