

Contrôle continu : preuves de programmes
SUJET 1

On rappelle que la notation $\text{prog}_{i \rightarrow j}$ désigne les lignes i à j (incluses) du programme prog . De plus valeurs contenues dans les variables sont soit des entiers de \mathbb{Z} , soit des valeurs de vérité (la distinction sera évidente en fonction du contexte).

Exercice 1

Soit le programme suivant :

	— prog —
1	$x \leftarrow (2 * y) - x$
2	$z \leftarrow x + y$
3	$y \leftarrow y + 1$

Question 1 Montrer que le triplet $\langle \rangle \text{ prog } \langle z - x = y - 1 \rangle$ est totalement correct.

Question 2 Montrer que le triplet $\langle x = y \rangle \text{ prog } \langle (z = 2x) \wedge (y = x + 1) \rangle$ est totalement correct.

Exercice 2

Soit le programme suivant :

	— prog —
1	if ($x > (y + 1)$)
2	$y \leftarrow y + 1$
3	$x \leftarrow x - 1$
4	else
5	$y \leftarrow y - 1$
6	$x \leftarrow x + 1$
7	end if

Question 1 Montrer que le triplet $\langle x > y + 1 \rangle \text{ prog}_{2 \rightarrow 3} \langle x \geq y \rangle$ est totalement correct **sans utiliser la règle de Floyd pour l'affectation**.

Question 2 Montrer que le triplet $\langle x \geq y - 2 \rangle \text{ prog}_{5 \rightarrow 6} \langle x \geq y \rangle$ est totalement correct.

Question 3 Montrer que le triplet $\langle x \geq y - 2 \rangle \text{ prog } \langle x \geq y \rangle$ est totalement correct.

Exercice 3

On considère le programme suivant :

1	<code>k ← 0</code>	<code>prog</code>
2	<code>t ← x</code>	
3	<code>while (t > 1)</code>	
4	<code>k ← k + 1</code>	
5	<code>t ← t / 2</code>	
6	<code>end while</code>	

On rappelle que $t/2$ désigne le quotient de la division euclidienne de t par 2. L'objectif de l'exercice est de montrer qu'à la fin de la boucle, k contient la partie entière de $\log_2(x)$. On appelle I la formule du calcul des prédicats suivante

$$I \equiv (t \geq 1) \wedge (2^k t \leq x) \wedge (x < 2^{k+1} t)$$

Question 1 Montrer que le triplet $\langle x > 0 \rangle \text{ prog}_{1 \rightarrow 2} \langle I \rangle$ est totalement correct.

Question 2 Que peut-on dire du triplet $\langle \rangle \text{ prog}_{1 \rightarrow 2} \langle I \rangle$?

Question 3 Montrer que le triplet suivant est totalement correct :

$$\langle (t > 1) \wedge (2^k t \leq x) \wedge (x < 2^{k+1} t) \rangle \text{ prog}_{4 \rightarrow 5} \langle (t > 0) \wedge (2^k t \leq x) \wedge (x < 2^{k+1} t) \rangle.$$

On utilisera la tautologie suivante (propriété de la division euclidienne) :

$$\forall y ((y \geq 0) \Rightarrow ((2(y/2) \leq y) \wedge (y \leq 2(y/2) + 1))),$$

dans laquelle $y/2$ désigne comme rappelé au dessus le quotient de la division euclidienne de y par 2.

Question 4 Montrer que le triplet suivant est partiellement correct :

$$\{I\} \text{ prog}_{3 \rightarrow 6} \left\{ (2^k \leq x) \wedge (x < 2^{k+1}) \right\},$$

puis en déduire la correction partielle du triplet suivant :

$$\{x > 0\} \text{ prog} \left\{ (2^k \leq x) \wedge (x < 2^{k+1}) \right\}.$$

Question 5 Proposer un variant pour la boucle et montrer la correction totale du triplet suivant grâce à ce variant :

$$\langle x > 0 \rangle \text{ prog} \langle (2^k \leq x) \wedge (x < 2^{k+1}) \rangle.$$