L2/L3 MASS **Année universitaire 2012–2013**
Université Paris 1

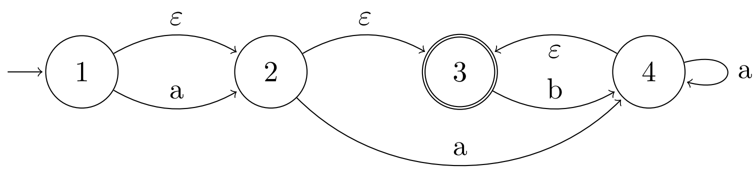
Examen de mathématiques pour l'informatique
Vendredi 28 Juin – Durée 2 heures

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Chacune des trois parties de l'énoncé (automates, logique propositionnelle et preuves de programmes) compte pour environ un tiers de la note. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Les documents imprimés ou manuscrits sont autorisés. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite.

1 Automates

Exercice 1

On considère l'automate asynchrone suivant :



Question 1 Donner un exemple de mot reconnu par l'automate et le plus court possible.
Question 2 Déterminer un langage L de taille infinie (c'est-à-dire contenant une infinité de mots) dont les mots sont reconnus par l'automate. On ne demande pas de déterminer le langage reconnu *exactement* par l'automate mais seulement une partie infinie de ce dernier. La réponse devra être justifiée.
Question 3 Supprimer les ε-transitions de l'automate en utilisant l'algorithme classique (attention, on ne demande pas un automate simplifié équivalent mais bien l'automate sans ε-transitions obtenu par l'application de l'algorithme de suppression, même s'il comporte des transitions et/ou des états inutiles).
Question 4 Donner une version déterministe de l'automate obtenu.

2 Logique propositionnelle

Exercice 2

Étudier la nature de la formule suivante en utilisant l'algorithme de Quine sans les équivalences notables générales (on utilisera seulement les équivalences associées à l'algorithme de Quine qui font toutes intervenir $\top$ et $\bot$) :

$$((a \vee c) \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \vee (c \Rightarrow b))$$

Exercice 3

Étudier la nature de la formule suivante en utilisant le calcul des séquents sans les équivalences notables (on utilisera donc uniquement les 8 règles du calcul des séquents, ainsi que les axiomes associés) :

$$(((a \Rightarrow (c \vee d)) \wedge (b \Rightarrow (d \vee a)) \wedge (c \Rightarrow d)) \Rightarrow (b \Rightarrow d))$$

3 Preuves de programmes

Exercice 4

On suppose dans cet exercice que dans un programme la fonction `sqrt` renvoie la partie entière de la racine carrée de son argument quand celui-ci est un entier positif. La formule suivante est donc une tautologie :

$$F \Leftrightarrow (\forall x\ ((x \geq 0) \Rightarrow (\texttt{sqrt}(x) \leq \sqrt{x} < \texttt{sqrt}(x) + 1)$$

La fonction renvoie 0 si son argument est un entier strictement négatif. Soit le programme suivant :

prog
```
if (x > 0)
  y ← sqrt(x)
else
  x ← -x
  y ← sqrt(x)
end if
```

Montrer que le triplet $\langle\rangle$ `prog` $\langle y = \lfloor\sqrt{x}\rfloor\rangle$ est totalement correct. Dans la postcondition, la notation $\lfloor u \rfloor$ désigne la partie entière de u.

Exercice 5

On considère le programme suivant :

prog
```
1 s ← 0
2 k ← n
3 while ( k > 0 ) {
4   s ← s + k
5   k ← k - 1
6 }
```

On cherche à montrer que ce programme calcule la somme des n premiers entiers, c'est-à-dire, plus précisément, que le triplet suivant est totalement correct :

$$\langle n \geq 0 \rangle\ \texttt{prog}\ \left\langle s = \sum_{i=1}^{n} i \right\rangle,$$

avec la convention classique que pour tout $l \geq 0$, $\sum_{i=l+1}^{l} i = 0$. On introduit d'abord la formule suivante :

$$I \equiv \left(s = \sum_{i=k+1}^{n} i\right) \wedge (k \geq 0)$$

Question 1 Montrer que le triplet $\langle n \geq 0 \rangle$ $\texttt{prog}_{1\to2}$ $\langle I \rangle$ est totalement correct.

Question 2 Montrer que le triplet suivant est totalement correct :

$$\langle I \wedge (k > 0) \rangle\ \texttt{prog}_{4\to5}\ \langle I \rangle$$

Question 3 Montrer que le triplet suivant est partiellement correct :

$$\{I\}\ \texttt{prog}_{3\to6}\ \left\{\left(s = \sum_{i=1}^{n} i\right)\right\},$$

puis en déduire la correction partielle du triplet suivant :

$$\{n \geq 0\} \ \texttt{prog} \ \left\{ \left(s = \sum_{i=1}^{n} i \right) \right\}.$$

On note V le terme réduit à k.

Question 4 Montrer que le triplet suivant est totalement correct :

$$\langle I \wedge (k > 0) \wedge (V = m) \rangle \ \texttt{prog}_{4 \to 5} \ \langle I \wedge (0 \leq V < m) \rangle \,,$$

puis en déduire la correction totale du triplet suivant :

$$\langle n \geq 0 \rangle \ \texttt{prog} \ \left\langle \left(s = \sum_{i=1}^{n} i \right) \right\rangle.$$