Optimisation

Fabrice Rossi

Décembre 2009/Janvier 2010

Plan

Table des matières

1 Résultats théoriques

1.1 Introduction

Forme générale

- un problème d'optimisation $(\mathcal{P})$ est défini par

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser sur } \mathbb{R}^n & J(\mathbf{x}) \\ \text{avec} & h_i(\mathbf{x}) = 0\,, 1 \leq i \leq p \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0\,, 1 \leq j \leq q \end{array}$$

- rappel de vocabulaire :
  - les h_i sont les **contraintes d'égalité** (notées $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$)
  - les g_j sont les **contraintes d'inégalité** (notées $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$)
  - l'**ensemble des contraintes** est

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | h_i(\mathbf{x}) = 0\,, 1 \leq i \leq p \text{ et } g_j(\mathbf{x}) \leq 0\,, 1 \leq j \leq q\}$$

ensemble des points admissibles ou **réalisables**

Conséquences

- les contraintes changent les conditions d'optimalité
- exemple :
  - $J(x, y) = x^2 + y^2$ à minimiser sous la contrainte $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \leq 0$
  - sur $\mathbb{R}^2$, on étudierait $\nabla J = 2(x, y)^T$
  - mais ici, le minimum vaut 4 et est atteint sur le cercle $x^2 + y^2 = 4$ sur lequel $\nabla J \neq \mathbf{0}$

- mais pas toujours :
  - $J(x, y) = x^2 + y^2$ à minimiser sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \leq 0$
  - le minimum est atteint en $(0, 0)$, avec $\nabla J = \mathbf{0}$
- les contraintes doivent donc apparaître dans les conditions d'optimalité

1.2 Existence et unicité

Existence d'un minimum

- cas général : $(\mathcal{P})$: $\min J(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$
- on suppose :
  - J continue
  - et $\mathcal{C}$ fermé et non vide
- alors :
  - si :
    - $\mathcal{C}$ est borné
    - ou si J est coercitive
  - alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution

Notes

Preuve :

- si $\mathcal{C}$ est borné, c'est un résultat classique
- sinon, on procède comme en l'absence de contraintes : on montre que le minimum est atteint en toute valeur d'adhérence de la suite minimisante et qu'il y a au moins une valeur d'adhérence

---

Existence et unicité

- remarque : si

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | h_i(\mathbf{x}) = 0 \, , 1 \leq i \leq p \;\text{ et } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \, , 1 \leq j \leq q\}$$

  avec des h_i et g_j continues, alors $\mathcal{C}$ est fermé
- si J est strictement convexe et $\mathcal{C}$ est convexe, alors $(\mathcal{P})$ admet **au plus** une solution
- problème convexe :
  - J est convexe
  - les h_i sont affines
  - les g_j sont convexes
  - et donc $\mathcal{C}$ est convexe

Notes

- pour la remarque : $\mathcal{C}$ est l'intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues
- pour le cas convexe : déjà vu dans la situation sans contrainte

---

1.3 Conditions d'optimalité

Condition du premier ordre

- si J est Gâteaux-différentiable en x^* solution de $(\mathcal{P})$ et si $\mathcal{C}$ est convexe, alors :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \; \langle \nabla J(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$$

- remarques :
  - intuitivement : on ne peut s'éloigner du minimum que dans une direction de montée
  - généralisable : notion de direction admissible
  - si $\mathbf{x}^*$ est un point intérieur de $\mathcal{C}$ alors $\nabla J(\mathbf{x}^*) = 0$
- si J est convexe la condition est nécessaire et suffisante

Notes

- on peut généraliser la condition nécessaire à $\mathcal{C}$ non convexe grâce à la notion de direction admissible : intuitivement, il s'agit des directions qui restent dans $\mathcal{C}$ en partant de $\mathbf{x}^*$.
- preuve :
  - si J est Gâteaux-différentiable, pour tout $\mathbf{h}$ et $t > 0$

$$J(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) = J(\mathbf{x}^*) + t \left\langle \nabla J(\mathbf{x}^*), \mathbf{h} \right\rangle + o(t)$$

  - la convexité de $\mathcal{C}$ permet d'assurer que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}^*$ sont dans $\mathcal{C}$, alors $\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}$ est aussi dans $\mathcal{C}$ si $t \in [0, 1]$ et $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$.
  - on a alors

$$t \left\langle \nabla J(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + o(t) \geq 0$$

  ce qui donne le résultat par passage à la limite
- cas convexe : il suffit d'utiliser la caractérisation de la convexité à l'ordre un

$$J(\mathbf{x}) \geq J(\mathbf{x}^*) + \left\langle \nabla J(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle$$

Égalités et inégalités

- *Conditions nécessaires non qualifiées*
- cas particulier $h_i(\mathbf{x}) = 0$ et $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ où tout est C^1 (J inclus)
- soit $\mathbf{x}^*$ une solution de $(\mathcal{P})$, alors il existe $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_p^*)$ et $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ tels que
  - $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \neq \mathbf{0}$
  - $h_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ 1 \leq i \leq p$ (admissibilité en égalité)
  - $g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0,\ 1 \leq j \leq q$ (admissibilité en inégalité)
  - $\mu_j^* \geq 0,\ 0 \leq j \leq q$
  - $\mu_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ 1 \leq j \leq q$ (**conditions de complémentarité**)
  - et

$$\mu_0^* \nabla J(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$$

Notes

Preuve :

- on considère $(\mathcal{P}_k)$ le problème de minimisation sur $\mathcal{B}(\mathbf{x}^*, \rho)$ (boule fermée) de

$$J_k(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{p} h_i(\mathbf{x})^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{q} g_j^+(\mathbf{x})^2 + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^2,$$

  avec $g_j^+(\mathbf{x}) = \max(0, g_j(\mathbf{x}))$
- idées de la preuve :
  - se ramener à un problème sans contrainte
  - s'arranger pour que la solution de ce problème soit proche de celle de $(\mathcal{P})$
  - principe de pénalisation : une violation des contraintes augmente la fonction objectif
- J_k est C^1 :

- on définit $l(u) = \max(0,u)^2$. Il est clair que l est C^1 en dehors de 0, avec $l'(u) = 0$ pour $u < 0$ et $l'(u) = 2u$ pour $u > 0$
- en 0, on a
$$|l(h) - l(0)| \leq h^2,$$
et donc $l'(0) = 0$, ce qui achève de montrer que l est C^1 sur $\mathbb{R}$. En outre, on a
$$l'(u) = 2\max(0,u)$$
- J_k est donc clairement C^1 et on a
$$\nabla\left(g_j^+(\mathbf{x})^2\right) = 2g_j^+(\mathbf{x})\nabla g_j(\mathbf{x})$$

- comme J_k est continue sur le compact $\mathcal{B}(\mathbf{x}^*,\rho)$, elle y atteint son minimum en $\mathbf{x}_k$. On montre alors que $\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$:
  - par hypothèse
$$J_k(\mathbf{x}_k) \leq J_k(\mathbf{x}^*) = J(\mathbf{x}^*),$$
et donc
$$\frac{J(\mathbf{x}_k)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^p h_i(\mathbf{x}_k)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^q g_j^+(\mathbf{x}_k)^2 + \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k\|^2}{k} \leq \frac{J(\mathbf{x}^*)}{k}$$
  - soit $\mathbf{u}^*$ une valeur d'adhérence de $(\mathbf{x}_k)_k$. En passant à la limite sur k sur la suite extraite dans la majoration au dessus, on a
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p h_i(\mathbf{u}^*)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^q g_j^+(\mathbf{u}^*)^2 \leq 0,$$
et donc $\mathbf{u}^* \in \mathcal{C}$.
  - comme
$$J(\mathbf{x}_k) + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k\|^2 \leq J(\mathbf{x}^*),$$
on a
$$J(\mathbf{u}^*) + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{u}^*\|^2 \leq J(\mathbf{x}^*),$$
et donc $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{u}^*\|^2 = 0$, ce qui donne la conclusion.
- pour k suffisamment grand, $\mathbf{x}_k$ est dans la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathbf{x}^*,\rho)$, et on peut donc utiliser l'équation d'Euler, ce qui donne
$$\nabla J(\mathbf{x}_k) + k\sum_{i=1}^p h_i(\mathbf{x}_k)\nabla h_i(\mathbf{x}_k) + k\sum_{j=1}^q g_j^+(\mathbf{x}_k)\nabla g_j(\mathbf{x}_k) + 2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k) = 0$$
- on pose
$$s_k = \sqrt{1 + k^2\sum_{i=1}^p h_i(\mathbf{x}_k)^2 + k^2\sum_{j=1}^q g_j^+(\mathbf{x}_k)^2},$$
et on divise l'équation précédente par s_k. On pose
$$\begin{aligned}\mu_0^k &= \frac{1}{s_k},\\ \mu_i^k &= \frac{kg_j^+(\mathbf{x}_k)}{s_k},\\ \lambda_i^k &= \frac{kh_i(\mathbf{x}_k)}{s_k}.\end{aligned}$$

- Les vecteurs $(\boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)^T$ sont de norme 1 et on peut donc considérer une valeur d'adhérence $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)^T$ de la suite. En passant à la limite, on obtient

$$\mu_0^* \nabla J(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0.$$

- En outre :
  - $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)^T$ est de norme 1, donc les coefficients ne sont pas tous nuls.
  - $\mu_i^k \geq 0$ et donc $\mu_i^* \geq 0$.
  - si $g_j(\mathbf{x}^*) < 0$, $g_j(\mathbf{x_k}^*) < 0$ à partir d'un certain rang et donc $\mu_i^k = 0$, puis $\mu_i^* = 0$.

Qualification
- condition utile si $\mu_0 \neq 0$
- problème de *qualification* des contraintes :
  - conditions (locales) sur le problème qui garantissent que $\mu_0 \neq 0$
  - très nombreuses variantes plus ou moins sophistiquées
- *contrainte active* : g_j est **active** (ou saturée) en $\mathbf{x}^*$ si $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$; $I(\mathbf{x}^*)$, ensemble des indices des contraintes actives en $\mathbf{x}^*$
- *régularité* : $\mathbf{x}^*$ est régulier pour $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ si
  - $\mathbf{x}^*$ est admissible
  - les $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ sont linéairement indépendants
  - il existe $d \neq 0$ tel que $\langle \nabla h_i(\mathbf{x}^*), d \rangle = 0$ pour tout i et $\langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), d \rangle < 0$ pour tout $j \in I(\mathbf{x}^*)$ (ou $\langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), d \rangle = 0$ si g_j est affine)
  - régularité de Mangasarian-Fromowitz

Conditions qualifiées
- Conditions nécessaires qualifiées du 1er ordre de KKT (*Karush, Kuhn et Tucker*)
- Hypothèses :
  - J, $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}$ C^1
  - $\mathbf{x}^*$ solution de $(\mathcal{P})$
  - $\mathbf{x}^*$ est régulier pour $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$
- Alors il existe $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_p^*)$ et $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ tels que
  - $h_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ 1 \leq i \leq p$
  - $g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0,\ 1 \leq j \leq q$
  - $\mu_j^* \geq 0,\ 1 \leq j \leq q$
  - $\mu_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ 1 \leq j \leq q$
  - et

$$\nabla J(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$$

Notes

Preuve :
- par l'absurde à partir des conditions non qualifiées

$$\mu_0^* \nabla J(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$$

- on suppose $\mu_0^* = 0$:
  - alors au moins un des μ_j^* pour $j \geq 1$ est non nul car sinon $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = 0$ et donc $\boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0}$ par indépendance

– comme $\mu_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0$, l'indice du $\mu_{j_0} \neq 0$ est dans $I(\mathbf{x}^*)$
– mais alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \langle \nabla h_i(\mathbf{x}^*), d\rangle + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), d\rangle &= 0 \\ &\leq \mu_{j_0}^* \langle \nabla g_{j_0}(\mathbf{x}^*), d\rangle \\ &< 0\end{aligned}$$

Cas convexe

– si le problème $(\mathcal{P})$ est convexe, les conditions de KKT sont *nécessaires et suffisantes* en un point $\mathbf{x}^*$ régulier
– remarque : le caractère suffisant ne nécessite pas la régularité
– conditions de qualification plus simples (de *Slater*) : il existe au moins un point strictement admissible $\mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0$

Notes

– preuve :
  – si KKT est vérifié, $\mathbf{x}^*$ est un minimum de la fonction convexe

$$H(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* g_j(\mathbf{x})$$

  – quand $\mathbf{x}$ est admissible, $H(\mathbf{x}) \leq J(\mathbf{x})$
  – par KTT, $H(\mathbf{x}^*) = J(\mathbf{x}^*)$ car $\mu_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0$
  – donc pour tout $\mathbf{x}$ est admissible,

$$J(\mathbf{x}^*) = H(\mathbf{x}^*) \leq H(\mathbf{x}) \leq J(\mathbf{x})$$

– Remarque : conditions de qualification de *Slater* pour un problème convexe : il existe au moins un point strictement admissible $\mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0$

1.4 Dualité

Lagrangien

– le *Lagrangien* du problème $(\mathcal{P})$ est la fonction

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j(\mathbf{x})$$

– quand J, $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}$ sont C^1 les conditions de KKT s'expriment par $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$
– les λ_i et les μ_j sont les *multiplicateurs* de Lagrange associés aux contraintes

Dualité

– *fonction duale* de Lagrange

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

– g est toujours concave

– pour $\boldsymbol{\mu} \geq 0$

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{x})$$

– *problème dual* $(\mathcal{Q})$ associé au problème primal $(\mathcal{P})$

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser sur } \mathbb{R}^{p+q} & g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{avec} & \mu_j \geq 0\,, 1 \leq j \leq q \end{array}$$

– *saut de dualité* : $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{x}) - \max_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Notes

La concavité vient de la définition en tant qu'infimum de fonctions affines.

Point selle

– symétrisation du problème : $(\mathcal{P})$ est équivalent à

$$\inf_{\mathbf{x}} \sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \geq 0} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

– le problème dual $(\mathcal{Q})$ est

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \geq 0} \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

– point selle : minimal par rapport à une variable, maximal par rapport à l'autre
– $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ est un point selle du Lagrangien si pour tout $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ ($\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$ et $\boldsymbol{\mu} \geq 0$)

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \leq L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

Théorème de dualité

– $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ est un point selle avec $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$ ssi $\mathbf{x}^*$ est une solution de $(\mathcal{P})$, $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ est une solution de $(\mathcal{Q})$ et le saut de dualité est nul
– intérêt : pour résoudre le problème, on peut donc chercher un point selle du Lagrangien
– *remarque* : un point selle du Lagrangien vérifie les conditions de KKT (sans hypothèse autre que J, $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}$ C^1)
– si le problème est convexe : point selle $\Leftrightarrow$ KKT

1.5 Second ordre

Régularité

– Condition plus forte que celle de Mangasarian-Fromowitz :
  – $\mathbf{x}^*$ est admissible
  – $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ et les $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$ sont linéairement indépendants pour $j \in I(\mathbf{x}^*)$
– Contraintes *fortement* actives :

$$I^+(\mathbf{x}^*) = \{j \mid g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ et } \mu_j^* > 0\}$$

– si $I(\mathbf{x}^*) = I^+(\mathbf{x}^*)$ on a complémentarité stricte

Conditions nécessaires du 2ème ordre

– Hypothèses :
  – J, $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}$ C^2
  – $\mathbf{x}^*$ solution de $(\mathcal{P})$ et fortement régulier
– alors il existe $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_p^*)$ et $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ tels que
  – les conditions de KKT sont vérifiées

- et pour tout d vérifiant :
  - $\langle \nabla h_i(\mathbf{x}^*), d\rangle = 0$ pour $1 \leq i \leq p$
  - $\langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), d\rangle = 0$ pour $j \in I^+(\mathbf{x}^*)$
  - $\langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), d\rangle \leq 0$ pour $I(\mathbf{x}^*) \setminus I^+(\mathbf{x}^*)$

  on a
$$\left\langle \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) d, d \right\rangle \geq 0$$

Conditions suffisantes
- Hypothèses :
  - J, $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}$ C^2
  - $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ vérifie les conditions KKT
- si la matrice $\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ est définie positive sur
$$\Big\{ d \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \langle \nabla h_i(\mathbf{x}^*), d\rangle = 0,\ 1 \leq i \leq, p \\ \text{et } \langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), d\rangle = 0,\ j \in I^+(\mathbf{x}^*) \Big\}$$

  alors $\mathbf{x}^*$ est un minimum local de J sur $\mathcal{C}$

2 Algorithmes

2.1 Introduction

Classes d'algorithmes
- quelques grandes classes d'algorithmes :
  - gradient projeté :
    - descente de gradient
    - projection sur $\mathcal{C}$ à chaque étape
  - pénalisation :
    - optimisation sans contrainte de J+pénalité
    - méthodes extérieures : on ramène progressivement le candidat minimum dans $\mathcal{C}$
    - méthodes intérieures : on relâche progressivement les pénalités
  - programmation quadratique successive : résoudre des approximations quadratiques du problème
- principe sous-jacent : résoudre une série de problèmes sans contrainte (ou plus simple)

Projection
- outil important : projection sur un convexe fermé
  - soit C un convexe fermé et non vide de $\mathbb{R}^n$
  - pour tout $\mathbf{x}$ alors
$$\pi_C(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

    existe et est unique
- propriétés :
  - $\pi_C(\mathbf{x})$ est l'unique élément de C tel que
$$\forall \mathbf{y} \in C,\ \langle \mathbf{x} - \pi_C(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \pi_C(\mathbf{x})\rangle \leq 0$$

    ou encore tel que
$$\forall \mathbf{y} \in C,\ \langle \pi_C(\mathbf{x}) - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle \leq 0$$

Projection

- π_C est une contraction :
$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y},\ \|\pi_C(\mathbf{x}) - \pi_C(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$
- preuve simple :
  - on a
$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} - \pi_C(\mathbf{x}), \pi_C(\mathbf{y}) - \pi_C(\mathbf{x})\rangle &\leq 0\\ \langle \mathbf{y} - \pi_C(\mathbf{y}), \pi_C(\mathbf{x}) - \pi_C(\mathbf{y})\rangle &\leq 0\end{aligned}$$
  - soit
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \pi_C(\mathbf{y}) - \pi_C(\mathbf{x})\rangle + \|\pi_C(\mathbf{x}) - \pi_C(\mathbf{y})\|^2 \leq 0$$
  - et on termine par Cauchy-Schwartz

2.2 Gradient

Gradient projeté

- minimisation de J sur C convexe fermé
- algorithme :
  1. point initial $\mathbf{x}_0$
  2. pour $k \geq 1$ croissant
     (a) calculer $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \rho_k \nabla J(\mathbf{x}_k)$
     (b) puis $\mathbf{x}_{k+1} = \pi_C(\mathbf{y}_{k+1})$
     (c) tester la convergence et quitter la boucle le cas échéant (par ex. $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon$)
- formulation simple mais mise en oeuvre potentiellement délicate :
  - si C est simple (par ex., $l_i \leq x_i \leq u_i$), pas de problème
  - sinon le calcul de $\pi_C(\mathbf{y}_{k+1})$ est un problème d'optimisation sous contraintes

Convergence

- si J est C^1, α-convexe et de dérivée M-lipschitzienne
- et si $\rho_k \in [\beta_1, \beta_2]$ avec $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{2\alpha}{M^2}$
- alors l'algorithme du gradient projeté converge :
  - preuve très proche de celle du cas sans contrainte
  - si $\mathbf{x}^*$ est l'optimum, on a pour tout ρ
$$\mathbf{x}^* = \pi_C(\mathbf{x}^* - \rho \nabla J(\mathbf{x}^*))$$
  - donc par contraction de π_C
$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|(\mathbf{x}_k - \rho_k \nabla J(\mathbf{x}_k)) - (\mathbf{x}^* - \rho_k \nabla J(\mathbf{x}^*))\|^2$$
    ce qui nous ramène au cas sans projection

2.3 Pénalisation

Pénalisation

- idée principale : remplacer un problème avec contraintes par un problème sans contrainte dont la fonction objectif « décourage » les points non admissibles
- solution naïve :
  - on définit
$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty & \mathbf{x} \notin C \\ 0 & \mathbf{x} \in C \end{cases}$$
  - alors trouver $\arg\min_{\mathbf{x} \in C} J(\mathbf{x})$ est équivalent à trouver $\arg\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} J(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})$
- solutions réalistes : utiliser une fonction α régulière (C^1 au moins) petite sur C et grande en dehors

Méthodes de point extérieur

- α vérifie :
  - α est continue sur $\mathbb{R}^n$
  - $\alpha(\mathbf{x}) \geq 0$
  - $\alpha(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in C$
- Exemples :
  - $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ est représentée par $\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2$
  - $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$ est représentée par $\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{g}^+(\mathbf{x})\|^2$
- on considère la famille de problèmes $(\mathcal{P}_r)$ pour $r > 0$ définis par

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (J(\mathbf{x}) + r\alpha(\mathbf{x}))$$

- méthodes de point extérieur : on ne peut pas garantir $\mathbf{x}_r^* \in C$

Méthodes de point intérieur

- même principe, mais avec des points à l'intérieur de C
- pour les contraintes d'inégalité seulement
- α est une *barrière* et vérifie :
  - α est continue sur $\overset{\circ}{C}$
  - $\mathbf{x} \notin C \Rightarrow \alpha(\mathbf{x}) = \infty$
- pour les contraintes $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$, on prend généralement

$$-\sum_{j=1}^{q} \log(-g_j(\mathbf{x}))$$

- comme pour les méthodes de point extérieur, on considère les problèmes $(\mathcal{P}_r)$ pour $r > 0$ définis par

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (J(\mathbf{x}) + r\alpha(\mathbf{x}))$$

- ici, on a toujours $\mathbf{x}_r^* \in \overset{\circ}{C}$

Pénalisation

- minimisation de J sur C convexe fermé
- algorithme (pour une suite $(r_k)_k$ croissante) :
  1. point initial $\mathbf{x}_0$
  2. pour $k \geq 1$ croissant
     (a) résoudre le problème $(\mathcal{P}_{r_k})$

     $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (J(\mathbf{x}) + r_k\alpha(\mathbf{x}))$$

     en partant de la solution $\mathbf{x}_{k-1}$

     (b) tester la qualité du point obtenu $\mathbf{x}_k$ et quitter la boucle le cas échéant
- fonctionne très bien en pratique pour le cas du point intérieur (on résout $(\mathcal{P}_{r_k})$ par une méthode de (quasi)Newton avec contraintes d'égalités)
- l'efficacité vient du redémarrage depuis un bon candidat

Convergence

- on suppose J continue et coercitive, et C fermé et non vide
- on considère une méthode de point extérieur
- résultat :
  - pour tout $r > 0$, $(\mathcal{P}_r)$ possède au moins une solution

- toute famille $(\mathbf{x}_r)_{r>0}$ de solutions est bornée
  - les valeurs d'adhérence de toute famille $(\mathbf{x}_r)_{r>0}$ de solutions sont des solutions de $(\mathcal{P})$
- preuve ($\mathbf{x}^*$ est une solution de $(\mathcal{P})$) :
  - $J_r(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) + r\alpha(\mathbf{x})$ est coercitive et continue
  - $\mathbf{x}_r$ solution de $(\mathcal{P}_r)$, $J(\mathbf{x}_r) \leq J_r(\mathbf{x}_r) \leq J_r(\mathbf{x}^*) = J(\mathbf{x}^*)$, donc $(\mathbf{x}_r)_{r>0}$ est bornée
  - comme $\alpha(\mathbf{x}_r) \leq \frac{1}{r}(J(\mathbf{x}^*) - J(\mathbf{x}_r))$, on a $\lim_{r\to+\infty} \alpha(\mathbf{x}_r) = 0$
  - et donc pour toute valeur d'adhérence $\hat{\mathbf{x}}$, $J(\hat{\mathbf{x}}) \leq J(\mathbf{x}^*)$

2.4 Dualité

Algorithme d'Uzawa

- idée : chercher directement un point selle du Lagrangien
- algorithme (paramètre $\rho > 0$) :
  1. valeurs initiales des multiplicateurs $\boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\mu}^1$
  2. pour $k \geq 1$ croissant
     (a) trouver $\mathbf{x}_k$ solution du problème (sans contrainte)
     $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$$
     (b) mettre à jour $(\boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ par
     $$\begin{aligned} \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k + \rho h_i(\mathbf{x}_k) \\ \mu_j^{k+1} &= \max(0, \mu_j^k + \rho g_j(\mathbf{x}_k)) \end{aligned}$$
     (c) tester la convergence et quitter la boucle le cas échéant (par ex. $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon$)

Algorithme d'Uzawa

- on peut montrer que l'algorithme d'Uzawa est un gradient projeté sur le problème dual :
  - on montre que $\nabla g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})^T$
  - on maximise $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, ce qui explique le signe dans la mise à jour des multiplicateurs
  - intéressant parce que la projection est triviale
- Convergence :
  - si J est C^1, α-convexe, $\mathbf{h}$ affine et $\mathbf{g}$ convexe et M_g lipschitzienne
  - et si L possède un point selle $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
  - alors l'algorithme converge vers $\mathbf{x}^*$ pour tout choix de ρ dans $]0, \frac{2\alpha}{M_g^2+M_h^2}[$