Initiation aux processus : Chaînes de Markov en temps continu

Fabrice Rossi

26 février 2003

1 La loi exponentielle

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de taux respectif μ et λ.

Questions :

1. Calculer $P(X > Y)$
2. Calculer la loi de $\min(X, Y)$

Exercice 2

On dit qu'une variable aléatoire positive X est sans mémoire si pour tout t et s positifs ou nuls, on a $P(X > t + s|X > s) = P(X > t)$. Montrer que toute variable aléatoire sans mémoire suit une loi exponentielle. Pour ce faire, on procédera de la façon suivante :

1. Montrer que $P(X > t + s|X > s) = P(X > t)$ est équivalent à $P(X > t + s) = P(X > t)P(X > s)$.
2. En déduire une expression simple de $F(\frac{m}{n})$ (où F désigne la fonction de répartition de X et où m et n sont des entiers).
3. Utiliser la continuité à droite de F pour conclure.

Exercice 3

Un piéton veut traverser une rue. Les instants de passage des voitures sont aléatoires et on note T_n l'instant de passage de la n-ième voiture. On suppose que les intervalles de temps entre le passage de deux voitures sont indépendants et distribués selon une loi exponentielle de taux 1. Le piéton décide de traverser après le passage de la S-ième voiture définie par $S = \inf\{n + 1 \mid T_{n+1} - T_n \geq 1\}$.

Questions :

1. Calculer la loi de S
2. Calculer $E(S)$

2 Processus de Markov

Exercice 4

On considère une population dans laquelle deux évènements indépendants (naissance ou mort) peuvent avoir lieu. Le temps écoulé entre deux naissances (resp. deux morts) suit une loi exponentielle de paramètre λ (resp. μ). Montrer que la taille de la population $X(t)$ est un processus de Markov et préciser ses paramètres.

Exercice 5

La durée de fonctionnement sans panne d'une machine est modélisée par une variable aléatoire exponentielle de taux λ. En cas de panne, la durée de réparation de la machine est aussi modélisée par une variable aléatoire exponentielle de taux μ. Les durées de fonctionnement et de réparation sont indépendantes. On note $X(t)$ la fonction indicatrice de l'évènement $\{$la machine est en panne à l'instant $t\}$.

Questions :

1. Montrer que $X(t)$ est un processus de Markov et donner ses paramètres.
2. Ecrire les équations *backward* pour $P_{00}(t)$ et $P_{10}(t)$.
3. Etablir une expression analytique simple pour $P_{00}(t)$ et $P_{10}(t)$.
4. Chercher la distribution stationnaire du processus.

Exercice 6

On considère un cabinet médical pour lequel l'intervalle d'arrivée entre deux patients est distribué selon une loi exponentielle de taux $\lambda = 3$. Le temps de traitement d'un patient est aussi distribué selon une loi exponentielle de taux $\mu = 4$. On considère que la salle d'attente ne contient qu'une seule place. Il y a donc entre 0 et 2 patients dans le cabinet à l'instant t et on note $X(t)$ ce nombre de patients.

Questions :

1. Donner les paramètres du processus de Markov $X(t)$.
2. Chercher la distribution stationnaire du processus.
3. Déterminer, en régime stationnaire, la probabilité qu'un patient qui arrive puisse être traité.