Initiation aux processus : Projet

Fabrice Rossi

26 février 2003

Comme dans tout projet de simulation, vous devez impérativement **commenter** les résultats numériques que vous obtenez.

1 Etude d'une chaîne de Markov en temps discret

On considère une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ définie de la façon suivante :
- la position du marcheur est un couple $(X_n, Y_n) \in \mathbb{Z}^2$
- $X_0 = Y_0 = 0$
- $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de variables aléatoires indépendantes. Chaque suite est identiquement distribuée avec $P(\alpha_n = 1) = p_x$, $P(\alpha_n = -1) = q_x = 1 - p_x$, $P(\beta_n = 1) = p_y$ et $P(\beta_n = -1) = q_y = 1 - p_y$
- $X_{n+1} = X_n + \alpha_n$ et $Y_{n+1} = Y_n + \beta_n$

Questions :
1. Expliquez brièvement pourquoi la position $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
2. En vous inspirant de la technique utilisée pour traiter le cas à une seule dimension (marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$), montrer que si $p_x = p_y = \frac{1}{2}$ la chaîne est récurrente. On commencera par calculer la probabilité de retour au point de départ en $2n$ étapes.
3. En utilisant la loi des grands nombres, étudiez le comportement asymptotique de X_n et Y_n dans le cas où $p_x \neq \frac{1}{2}$ et $p_y \neq \frac{1}{2}$.
4. Simulez des réalisations de la marche aléatoire pour différentes valeurs de p_x et p_y (en choisissant des valeurs "extrêmes" comme $\frac{1}{2}$, 0.1 et 0.9).
5. Pour $p_x = p_y = \frac{1}{2}$, estimez par simulation le temps de première sortie du disque de rayon R pour différentes valeurs de R (par exemple 10, 15 et 20).

2 Etude d'une chaîne de Markov en temps continu

On considère un cabinet médical dont la salle d'attente peut contenir jusqu'à n personnes. On suppose que l'intervalle d'arrivée entre deux patients est distribué selon une loi exponentielle de taux λ. Le temps de traitement d'un patient est aussi distribué selon une loi exponentielle de taux μ. On appelle $X(t)$ le nombre de patients dans la salle d'attente à l'instant t.

Questions :
1. Donnez les paramètres du processus de Markov $X(t)$.
2. Cherchez la distribution stationnaire du processus.
3. Déterminez la probabilité qu'un patient qui arrive puisse être traité (en régime stationnaire).
4. Simulez des réalisations du processus quand $\lambda < \mu$ pour différentes valeurs de n.
5. Estimez grâce aux simulations la probabilité qu'un patient qui arrive puisse être traité.