Contrôle continu : Statistique

Sujet 1

Prénom :
Nom :

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions. L'énoncé doit impérativement être rendu avec la copie.

Exercice 1

On étudie un dé truqué à six faces. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers associé au lancer de ce dé. Après une étude des propriétés physiques du dé, on décide d'utiliser la probabilité suivante sur Ω :

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{i\})$	a	b	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

Question 1 Quelles propriétés doivent vérifier a et b pour que $\mathbb{P}$ soit bien une probabilité sur Ω ?

Réponse : Pour être une probabilité, $\mathbb{P}$ doit satisfaire plusieurs conditions :

- Pour tout évènement A de Ω, $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$, donc a et b sont dans $[0,1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- σ-additivité

Ces deux dernières propriétés impliquent notamment que pour toute famille finie d'événements disjoints deux à deux $(A_i)_{0\leq i\leq n}$, $\mathbb{P}(\bigcup_{0\leq i\leq n} A_i) = \sum_{0\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i)$.
Ici, pour que $\mathbb{P}$ soit une probabilité, il est donc nécessaire que $\sum_{1\leq i\leq 6} \mathbb{P}(\{i\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, d'où $a + b = 1 - \frac{1}{20} - \frac{4}{20} - \frac{5}{20} - \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

Commentaire : Il n'y a pas de difficulté particulière à cette question, mais il convient de bien justifier votre raisonnement et d'explicitement se référer aux propriétés des probabilités qui sont pertinentes ici.

Question 2 Une nouvelle série d'expériences permet de faire l'hypothèse que la probabilité d'obtenir un chiffre impair avec ce dé truqué est de $\frac{11}{20}$. En déduire a puis b (en justifiant votre réponse !).

Réponse : D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(\{1,3,5\}) = \frac{11}{20}$. Comme les évènements $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ sont disjoints, on doit avoir : $\mathbb{P}(\{1,3,5\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) = a + \frac{1}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$. D'où, $a = \frac{5}{20}$ et en utilisant le résultat de la question précédente, $b = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Question 3 Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3.

Réponse : Soit l'événement $A = \{1,2,3\}$, c'est-à-dire l'événement "obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3". Alors on a, avec A comme union d'ensembles disjoints : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Exercice 2

On utilise des dés spéciaux pour jouer au jeu "LCR". Chaque dé possède six faces et est équilibré (les faces sont équiprobables). Trois faces ne contiennent aucun symbole (ce sont les faces blanches). Les autres faces comportent les lettres " L ", " C " et " R " (une face par lettre, soit les trois faces restantes).

Question 1 On lance un seul dé : quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche ?

Réponse : Définissons l'univers de l'expérience aléatoire "on lance un seul dé LCR". En distinguant les trois faces blanches en b_1, b_2, b_3, et en notant l, r et c les trois faces portant respectivement les lettres L, R et C, on pose :

$$\Omega = \{l,r,c,b_1,b_2,b_3\}$$

Du fait de la symétrie du dé (les dés sont équilibrés), définissons $\mathbb{P}$ comme la probabilité uniforme définie par $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. On sait que pour tout événement A de Ω, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Or, $\mid \Omega \mid = 6$ et l'événement B "obtenir une face blanche", s'écrit $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ et est de cardinal 3. D'où, $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$.

Commentaire : La seule difficulté est de bien distinguer les 3 faces blanches du dé : certes, le lanceur ne peut pas nécessairement observer ces trois faces distinctes (ou savoir laquelle sort), mais cela ne veut pas dire qu'il n'y a qu'une seule face : il existe trois faces distinctes (même si l'observateur est incapable de faire la différence). Ce point est essentiel pour pouvoir poser que $\mathbb{P}$ est uniforme.
Comme le résultat numérique est trivial, ce qui va compter c'est la qualité du raisonnement (et une modélisation propre pour y parvenir) et une justification correcte des différentes étapes.

Question 2 Quelle est la probabilité d'obtenir trois faces blanches quand on lance trois dés simultanément ?

Réponse : Pour cette nouvelle expérience aléatoire (lancer trois dés simultanément), on va considérer que les trois dés sont distincts (bien que cette différence ne soit pas nécessairement observable). On va donc poser pour l'univers de cette nouvelle expérience :

$$\Omega = \{l,r,c,b_1,b_2,b_3\}^3$$

Etant un produit cartésien de trois ensembles, le cardinal de Ω est donné par le produit des cardinaux des trois ensembles, soit $\mid \Omega \mid = 6^3$. Du fait de la symétrie entre les trois dés et de leur équilibre, on va définir $\mathbb{P}$ comme la probabilité uniforme (cf. définition générale plus haut), ce qui nous donnera pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3}$.
On sait également, du fait des propriétés de la probabilité uniforme, que la probabilité d'un événement quelconque A va être donnée par $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Soit B_3 l'événement "obtenir trois faces blanches", il suffit de déterminer son cardinal pour connaître sa probabilité. Or $B_3 = \{b_1, b_2, b_3\}^3$, d'où $\mid B_3 \mid = 3^3$. Il s'ensuit : $\mathbb{P}(B_3) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$.

Commentaire : Comme pour la question précédente, il faut distinguer les trois dés (qui sont distincts même si une fois de plus un observateur n'est pas nécessairement capable de les identifier). Cela permet d'utiliser les n-uplets (pour rappel c'est une généralisation des couples). C'est-à-dire que chaque évènement aléatoire est modélisé comme (d_1,d_2,d_3) avec d_1 le résultat du premier dé, d_2 celui du deuxième et d_3 celui du troisième. L'univers est alors un produit cartésien et les évènements souvent également, ce qui facilite généralement le dénombrement.

Pour un tour de jeu normal, le joueur lance trois dés simultanément. Chaque lettre obtenue lui fait payer un 1 euro soit au joueur à sa gauche (pour la lettre "L"), soit au joueur à sa droite (pour la lettre "R"), soit au pot central (pour la lettre "C").

Question 3 Quelle est la probabilité que le joueur perde exactement 2 euros en faveur du pot ?

Réponse : Soit P l'événement "le joueur perd exactement 2 euros en faveur du pot", autrement dit l'événement "le joueur tire 2 C exactement, et n'importe quelle autre face sauf un C pour le dé restant". P s'écrit donc en posant $F = \{l,r,c,b_1,b_2,b_3\}$:

$$P = (\{c\}^2 \times (F \setminus \{c\})) \cup (\{c\} \times (F \setminus \{c\}) \times \{c\}) \cup ((F \setminus \{c\}) \times \{c\}^2)$$

De manière un peu détaillée, il y a trois façons de faire 2 C et quelque chose d'autre, soit faire C avec les deux premiers dés et autres chose avec le troisième, soit faire C avec le premier et le dernier dé et autre chose avec le second, soit faire C avec les deux derniers dés et autre chose avec le troisième.
D'où, comme ces produits cartésiens sont disjoints : $\mid P \mid = 5 + 5 + 5 = 15$ et $\mathbb{P}(P) = \frac{15}{6^3}$.

Commentaire : Une fois de plus, comme on a modélisé les résultats des 3 dés comme un produit cartésien, l'ordre compte donc et obtenir 2 C avec les deux premiers dés, et autre chose avec le troisième, ou obtenir autre chose avec le premier et 2 C avec les deux derniers dés, ne sont pas les mêmes évènements.
Ce que l'on appelle les premier, deuxième et troisième dés n'a rien avoir avec le lancer de dé en lui même mais simplement la numérotation des dés que l'on a introduite dans notre modélisation.

Question 4 Quelle est la probabilité que le joueur perde exactement 2 euros quels que soient les bénéficiaires ?

Réponse : En utilisant la même méthode que précédemment : soit T l'événement le joueur perd exactement 2 euros quels que soient les bénéficiaires. Alors T s'écrit, en notant $L = \{l,r,c\}$, les faces avec une lettre, et $B = \{b_1,b_2,b_3\}$, les faces blanches :

$$T = (L^2 \times B) \cup (L \times B \times L) \cup (B \times L^2)$$

C'est-à-dire l'union de trois évènements :

- obtenir 2 lettres pour deux premiers dés et une face blanche pour le dernier
- obtenir 1 lettre au premier dé, une face blanche pour le deuxième, et une lettre pour le dernier
- obtenir 1 face blance pour le premier dé, et deux lettres pour les deux derniers.

Soit comme les trois produits cartésiens sont disjoints deux à deux, $| \ T \ |= 3^3 + 3^3 + 3^3 = 3^4$ et $\mathbb{P}(T) = \frac{3^4}{6^3} = \frac{3^4}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{3}{8}$

Question 5 Quelle est la probabilité que le joueur perde au plus 1 euro en faveur de son voisin de gauche ?

Réponse : Soit G l'événement, le joueur perd au plus 1 euro en faveur de son voisin de gauche. On peut le décomposer comme l'union de deux événements disjoints G_1, le joueur perd exactement 1 euro en faveur de son voisin de gauche et l'événement G_0 le joueur ne perd rien en faveur de son voisin de gauche. L'événement G_1 s'écrit en reprenant $F = \{l,r,c,b_1,b_2,b_3\}$:

$$G_1 = \big((F \setminus \{l\})^2 \times \{l\}\big) \cup \big((F \setminus \{l\}) \times \{l\} \times (F \setminus \{l\})\big) \cup \big(\{l\} \times (F \setminus \{l\})^2\big)$$

Soit un cardinal de (en tant qu'union d'ensembles disjoints) $| \ G_1 \ |= 5^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 1 = 3 \cdot 5^2$.
L'événement G_0 s'écrit quant à lui :

$$G_0 = (F \setminus \{l\})^3$$

Soit $| \ G_0 \ |= 5^3$. Au total comme les deux ensembles sont disjoints :

$$\mathbb{P}(G_0 \cup G_1) = \mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1) = \frac{5^3 + 3 \cdot 5^2}{6^3}$$

Exercice 3

On considère les variantes d'un jeu de hasard. Le joueur lance deux dés : le premier a 6 faces et le second 4. Les faces du premier dé sont numérotées de 0 à 5 et celles du second 1, 3, 5, 7.

Question 1 Déterminer l'univers de l'expérience aléatoire et la probabilité associée.

Réponse : On a deux dés distincts lancés, on va modéliser l'univers comme le produit cartésien des résultats du premier dé par ceux du deuxème dé (c'est-à-dire que chaque résultat est mis sous la forme d'un couple (d_1,d_2), avec d_1 le résultat du premier dé, et d_2 le résultat du deuxième dé). Ce qui nous donne :

$$\Omega = \{0,1,2,3,4,5\} \times \{1,3,5,7\}$$

Comme Ω est un produit cartésien, $| \ \Omega \ |= 6 \cdot 4 = 24$. Du fait de la symétrie des dés (implicite dans l'énoncé), on définit la probabilité uniforme sur Ω, c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{| \ \Omega \ |} = \frac{1}{24}$$

Question 2 Dans la première variante du jeu, on gagne :

- 3 euros si on obtient au moins une fois une boule numérotée 1.
- 0 euro sinon.

Déterminez X la variable aléatoire des gains dans ce jeu, sa loi de probabilité, puis calculez son espérance.

Réponse : Pour calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire, il nous faut déterminer $X(\Omega)$ puis déterminer pour chaque valeur prise par X son image réciproque : c'est-à-dire pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(x)$, l'ensemble des évènements élémentaires, ici de type (d_1,d_2), tels que $X(d_1,d_2) = x$.
$X(\Omega) = \{0,3,\}$ depuis l'énoncé, puisque les gains ne peuvent prendre que ces trois valeurs.
On a : $X^{-1}(\{3\}) = \big(\{1\} \times \{3,5,7\}\big) \cup \big(\{0,2,3,4,5\} \times \{1\}\big) \cup \big(\{1\} \times \{1\}\big)$
La seule difficulté étant de ne pas "compter" le double 1 deux fois.
En tant qu'union disjointe de produits cartésiens, cela donne un cardinal de : $\mid X^{-1}(\{3\}) \mid= 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 9$ D'où $\mathbb{P}_X(10) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{3\})) = \frac{9}{24}$.

Pour les autres cas, on obtient $X(\{\omega\}) = 0$, on va donc déterminer $X^{-1}(\{0\})$ comme le complémentaire de $X^{-1}(\{3\})$. Soit, $X^{-1}(\{0\}) = \overline{X^{-1}(\{3\})}$, d'où $\mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{0\})) = \frac{15}{24}$
Finalement, $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}_X(x) = \frac{9}{24} \cdot 3 + \frac{15}{24} \cdot 0 = \frac{27}{24}$

Commentaire : La méthode est toujours la même (ou presque) lorsque l'on doit calculer la loi de probabilité d'une variable aléatoire à partir de l'expérience aléatoire :

- Définition de Ω et de $\mathbb{P}$
- Détermination de $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X
- Détermination de $X^{-1}(\{x\})$ pour chacune des valeurs prises par X, c'est-à-dire l'ensemble des évènements élémentaires ω tels que $X(\omega) = x$. Soit formellement, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.

En outre, en général il y une valeur pour laquelle la détermination de $X^{-1}(\{x\})$ est plus difficile ou fastidieuse (généralement le cas restant, "sinon...", "dans les autres cas..."), il faut alors recourir au complémentaire, c'est à dire que $X^{-1}(\{x\})$ est le complémentaire dans Ω de l'union des autres $X^{-1}(\{y\})$.
Une difficulté qui parfois est présente (comme ici) est de ne pas compter plusieurs fois le même évènement élémentaire (comme (1,1) ici).

Question 3 Dans la deuxième variante du jeu, on gagne

- 13 euros si on obtient un 1 et un 0
- Sinon,
  - 1 euro si on obtient au moins une fois un 1
  - 2 euros si on obtient un 0
  - 0 euro dans tous les autres cas

Déterminez Y la variable aléatoire correspondant aux gains dans cette variante du jeu, sa loi de probabilité ainsi que son espérance. Comparez X et Y

Réponse : On suit une méthode similaire à celle utilisée dans la question précédente, et on obtient : $Y(\Omega) = \{1,2,13\}$ depuis l'énoncé.
Il n'y a qu'une seule façon de faire un 0 et un 1 : $Y^{-1}(\{13\}) = \{(0,1)\}$
D'où $\mid Y^{-1}(\{13\}) \mid= 1$ et finalement : $\mathbb{P}_Y(13) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{13\})) = \frac{1}{24}$.
Pour obtenir 1 euro, il faut faire au moins une fois un 1, en "enlevant" le cas (0,1) et en évitant de compter deux fois le double 1 : $Y^{-1}(\{1\}) = \big(\{1\} \times \{1,3,5,7\}\big) \cup \big(\{2,3,4,5\} \times \{1\}\big)$
Soit $\mid Y^{-1}(\{1\}) \mid= 4 + 4 = 8$ et $\mathbb{P}_Y(1) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{1\})) = \frac{8}{24}$.

Pour obtenir 2 euros, il faut obtenir un 0 (sans compter le cas (0,1) qui correspond à un paiement de 13

euros), d'où :
$Y^{-1}(\{2\}) = \{0\} \times \{3,5,7\}$
Soit $\mid Y^{-1}(\{2\}) \mid = \frac{3}{24}$.

Dans tous les autres cas on obtient $Y = 0$, donc en raisonnement avec le complémentaire on a : $\mathbb{P}_Y(0) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{8}{24} - \frac{3}{24} = \frac{12}{24}$.
Ce qui donne pour l'espérance :
$\mathbb{E}(Y) = 13 \cdot \frac{1}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{3}{24} + 0 \cdot \frac{12}{24} = \frac{27}{24}$
On en conclut donc que Y est différent de X car $X(\Omega) = \{0,3,10\} \neq \{1,2\} = Y(\Omega)$, et donc leur lois de probabilités ne peuvent pas être les mêmes. Mais leurs espérances sont égales : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.

Commentaire : Ici aussi, il faut être vigilant sur le fait de ne pas "compter" deux fois le même évènement élémentaire. (ici (0,1) ou encore (1,1)).

Question 4 Dans la troisième version du jeu, on gagne

- 3 euros si on obtient le même résultat sur les deux dés
- 3 euros si on obtient au moins une fois 7
- Sinon 0 euros.

Montrez que Z la variable aléatoire des gains pour la troisième variante du jeu a la même loi de probabilité que X paire mais que $Z \neq X$. Quelle est, sans calcul, l'espérance de Z ?

Réponse : On procède de la même manière. On a $Z(\Omega) = \{0,3\}$ et on détermine $Z^{-1}(\{x\})$ pour chacune de ces valeurs.
Pour $Z(\omega) = 3$ on a deux sous ensembles (lorsque les dés sont égaux ou lorsque l'on obtient un 7), soit :

$$Z^{-1}(\{3\}) = \{(d_1,d_2) \in \Omega \mid d_1 = d_2\} \cup \big(\{0,1,2,3,4,5\} \times \{7\}\big)$$

Soit :

$$Z^{-1}(\{3\}) = \{(1,1),(3,3),(5,5)\} \cup \big(\{0,1,2,3,4,5\} \times \{7\}\big)$$

Soit un cardinal de : $3 + 6 \cdot 1 = 9$. Et $\mathbb{P}_Z(3) = \frac{9}{24}$.
En raisonnant par le complémentaire, $\mathbb{P}_Z(0) = 1 - \frac{9}{24} = \frac{15}{24}$

X et Z suivent donc la même loi, car $X(\Omega) = Z(\Omega) = \{0,3\}$ **ET** pour toute valeur x, $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}_Z(x)$. Cela implique donc que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) = \frac{27}{24}$ (ce qui est vérifiable rapidement par ailleurs). Par contre, si les lois de X et Z sont égales, cela n'implique pas que X et Z soient identiques : ainsi $X((0,1)) = 3$ alors que $Z((0,1)) = 0$. Donc Z et X ne sont pas identiques : elles correspondent à deux applications différentes de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Dans une sordide affaire, les polices scientifiques de Las Vegas, Miami et Manhattan coopèrent afin de confondre le coupable. Sur les lieux du crime, il y avait 11 personnes présentes, et il n'y a pas de doute que le coupable est parmi elles. On trouve sur les lieux du crime un fragment de cheveu qui ne peut appartenir qu'au coupable. Les équipes de Manhattan et de Miami mettent en place deux tests pour identifier le coupable à partir de ce fragment. Les deux tests sont positifs avec certitude si la personne testée est coupable, mais les deux tests sont également positifs dans 10 % des cas si la personne testée est innocente.

Question 1 (question préliminaire) Montrer que pour toute probabilité et pour deux évènements E_1 et E_2 tels que $\mathbb{P}(E_1) = 1$ et $\mathbb{P}(E_2) = 1$ alors $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1$.

Réponse : Même si c'est intuitivement "évident" (l'intersection de deux événements de proba. 1 est de proba. 1), il faut justifier formellement :
$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1 + 1 - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$.
Par croissance des probabilités, $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) \geq \mathbb{P}(E_1) = 1$, d'où $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = 1$ puisque par définition des probabilités : $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) \in [0,1]$.
D'où, finalement $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 2 - 1 = 1$.

Commentaire : Pour ce type de "petites" démonstrations, on ne peut a priori utiliser que les propriétés fondamentales des probabilités (qui sont en nombre limité) : dans l'énoncé on nous dit "pour toute probabilité". Il s'agit donc d'articuler le recours à ces propriétés au sein d'une argumentation. On en utilise trois ici :

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- la croissance des proba.
- toute valeur prise par une proba. est entre 0 et 1.

Notez également qu'on ne fait aucune hypothèse sur E_1 et E_2 sauf les caractéristiques qui sont données dans l'énoncé (ex. l'indépendance n'a rien à voir avec la question).

Question 2 Pour la suite, on notera pour une personne prise au hasard :

- T1 : l'évènement "le test 1 est positif"
- T2 : l'évènement "le test 2 est positif"
- C : l'événement "la personne est coupable"

Donnez une écriture simple de l'événement I : "La personne est innocente" et de l'évènement T : "les résultats aux deux tests (1 et 2) sont positifs".

Réponse : C'est immédiat : $I = \overline{C}$ (toute personne innocente n'est pas coupable), et $T = T_1 \cap T_2$, c'est-à-dire que $T = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in T_1 \; et \; \omega \in T_2\}$.

Commentaire : L'énoncé demande explicitement une écriture simple. Donc il n'est pas pertinent de chercher à résoudre un problème compliqué.

Question 3 Quelle est la probabilité qu'un suspect pris au hasard, à qui on fait passer le test 1 et que ce dernier est positif, d'être le coupable ? Pour la suite de l'exercice, on admettra, du fait de la symétrie du problème, que $\mathbb{P}(C \mid T_2) = \mathbb{P}(C \mid T_1)$.

Réponse : L'énoncé nous dit : $\mathbb{P}(C) = 1/11$, $\mathbb{P}(\overline{C}) = 10/11$ et $\mathbb{P}(T_1 \mid C) = 1$ et $\mathbb{P}(T_1 \mid \overline{C}) = 0{,}1$.
Par la formule de Bayes et la formule des proba. totales sur le complémentaire :

$$\mathbb{P}(C \mid T_1) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \mid C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_1 \mid C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1 \mid \overline{C})\mathbb{P}(\overline{C})}$$

Soit :

$$\mathbb{P}(C \mid T_1) = \frac{1 \cdot 1/11}{1 \cdot 1/11 + 0{,}1 \cdot 10/11} = \frac{1/11}{2/11} = \frac{1}{2}$$

On note au passage qu'en effectuant un seul test, on n'a qu'une chance sur deux d'identifier le coupable. Cela est du au fait qu'il y a beaucoup plus d'innocents que de coupables dans la population (10 fois plus ici) et à la probabilité non négligeable d'un 'faux positif' (le test est positif alors que la personne est innocente).

Commentaire : Ce type de question est extrêmement classique. En général, lorsque l'on a $\mathbb{P}(A \mid B)$ et que l'on cherche $\mathbb{P}(B \mid A)$ on doit passer par Bayes (avec ou sans la formule des probabilités totales).

Question 4 Les deux équipes de Manhattan et de Miami se rendent compte que pour les personnes innocentes un résultat positif avec le test 1 et un résultat positif avec le test 2 sont des événements indépendants (c'est-à-dire que T_1 et T_2 sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \mid I)$). Grâce au résultat de la question 1, déterminez la probabilité que les tests 1 et 2 soient tous les deux positifs sachant que la personne est coupable. Puis, en appliquant la formule des probabilités totales à T_1, T_2 et $T_1 \cap T_2$, déterminez si, en général, les résultats des tests 1 et 2 sont indépendants ?

Réponse : Pour la première partie de la question, on a $\mathbb{P}(T_1 \mid C) = 1$ et $\mathbb{P}(T_2 \mid C) = 1$ or comme $\mathbb{P}(. \mid C)$ est une probabilité, le résultat de la première question doit s'appliquer. D'où, $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid C) = 1$

Ensuite, nous devons déterminer si T_1 et T_2 sont indépendants en général, on doit vérifier si :

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1) \cdot \mathbb{P}(T_2)$$

Il nous faut donc calculer ces trois probabilités. Et l'énoncé nous indique qu'il faut pour cela utiliser la formule des probabilités totales. On cherche en premier $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)$, par la formule des probabilités totales on a :

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid \overline{C})$$

Or on vient de voir que $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid C) = 1$. D'où

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid \overline{C})$$

Equation pour laquelle on a toutes les valeurs, sauf $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid \overline{C})$. Or l'énoncé nous dit que T_1 et T_2 sont indépendants pour $\mathbb{P}(. \mid \overline{C})$, car $\overline{C} = I$.Donc, en utilisant la définition de l'indépendance :

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1 \mid \overline{C})\mathbb{P}(T_2 \mid \overline{C})\mathbb{P}(\overline{C})$$

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = 1/11 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 10/11 = 1/10$$

En utilisant, une fois de plus les proba. totales :

$$\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}(T_1 \mid C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1 \mid \overline{C})\mathbb{P}(\overline{C}) = 1 \cdot 1/11 + 0{,}1 \cdot 10/11 = \frac{2}{11}$$

On fait de même pour T_2 et on obtient :

$$\mathbb{P}(T_2) = \frac{2}{11}$$

Comme on a

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{10} \neq \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{11} = \mathbb{P}(T_1) \cdot \mathbb{P}(T_2)$$

il s'ensuit que T_1 et T_2 ne sont pas indépendants pour $\mathbb{P}$.

Commentaire : La difficulté consiste à appréhender et utiliser une probabilité conditionnelle comme ce qu'elle est, c'est-à-dire comme une probabilité, à laquelle donc toute les propriétés/formules des probabilités s'appliquent. Ainsi, deux évènements A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}(\cdot \mid E)$ est équivalent à

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid E) = \mathbb{P}(A \mid E) \cdot \mathbb{P}(B \mid E)$$

Question 5 Quelle est la probabilité d'avoir affaire au coupable lorsque les deux tests 1 et 2 sont administrés à une même personne et sont positifs ?

Réponse : On a $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid C)$ on cherche $\mathbb{P}(C \mid T_1 \cap T_2)$, c'est un cas classique d'application de la formule de Bayes, qui nous donne ici :

$$\mathbb{P}(C \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$

Soit par l'énoncé ou d'après les calculs précédents :

$$\mathbb{P}(C \mid T_1 \cap T_2) = \frac{1 \cdot 1/11}{1/10} = 10/11$$

Question 6 L'équipe de Las Vegas entre en scène et imagine un autre test (le test 3) qui est tel qu'aucune personne innocente ne puisse être positive à la fois au test 2 et au test 3. Proposez une procédure pour découvrir de façon certaine le coupable (et justifiez).

Réponse : L'énoncé nous dit $\mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap \overline{C}) = 0$, c'est-à-dire il est impossible d'être positif aux deux tests (2 et 3) et d'être innocent.
En utilisant les probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_2 \cap T_3) = \mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap \overline{C}) + \mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap C) = \mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap C)$$

Donc $\frac{\mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap C)}{\mathbb{P}(T_2 \cap T_3)} = \frac{\mathbb{P}(C \cap T_2 \cap T_3)}{\mathbb{P}(T_2 \cap T_3)} = 1$ Ce qui est la définition de la probabilité de C sachant $T2 \cap T3$).
Donc

$$\mathbb{P}(C \mid T_2 \cap T_3) = 1$$

On a donc bien identifié une procédure qui permet de confondre le coupable de manière certaine.
En toute rigueur, avant la dernière étape, il faudrait vérifier que $\mathbb{P}(T_2 \cap T_3) > 0$, ce qui est le cas car $T_2 \cap T_3 = T_2 \cap T_3 \cap C = C$ et $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{11} \neq 0$.