Contrôle continu : Statistique

Sujet 1

Prénom :
Nom :

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions. L'énoncé doit impérativement être rendu avec la copie.

Exercice 1

Une chaine de télévision propose des vidéos à la demande mises à disposition par ADSL. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de clients simultanés pour un film. La loi de probabilité de X est donnée par :

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,1	0,3	a	0,2

Question 1 Déterminer a puis $E(X)$.

On appelle Y la variable aléatoire correspondant au coût de distribution d'un film par la chaîne. Ce coût est composé d'un coût fixe lié au système informatique de 5 euros et d'un coût variable par client donné par la fonction f qui au nombre de clients associe le coût variable. Cette fonction est donnée par $f(x) = x + x^2 + 1$. La partie x représente la redevance versée par la chaîne au studio producteur du film, alors que $x^2 + 1$ représente le coût en bande passante et en ressources informatiques de la distribution. On suppose donc que $Y = 5 + f(X)$.

Question 2 Déterminer la loi de probabilité de Y.

Question 3 Quelle est la probabilité que le coût total pour le distributeur soit supérieur ou égal à 18 euros ?

Question 4 Calculer l'espérance de Y (on pourra utiliser le fait que $V(X) = 0{,}81$).

Exercice 2

On étudie un couple de variables aléatoires (X, Y) telles que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On considère le tableau suivant, pour a et b deux nombres réels :

$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=-1$	a	0,05	0,1
$x=0$	0,15	0,1	0,15
$x=1$	0,05	0,2	b

Question 1 Quelles conditions doivent être vérifiées par a et b pour que le tableau donne la loi jointe du couple (X, Y) ?

Question 2 On suppose que $\mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}25$. En déduire a et b.

Question 3 Calculer $\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}, Y \in \{0, 1\})$.

Question 4 Calculer la loi (marginale) de X.

Question 5 Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 0$.

Question 6 Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire continue ayant la densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Question 1 Calculer k pour que f_X soit effectivement une densité.

Question 2 Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.

Question 3 Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Exercice 4

Gégé et Bernard jouent fréquemment à un jeu de cartes dans lequel le perdant d'une partie doit 50 centimes au gagnant. Ils jouent 6 parties et on a constaté par le passé que dans 3 parties sur 4, c'est Gégé qui gagnait. Soit X la variable aléatoire « nombre de parties gagnées par Bernard » sur un ensemble de 6 parties.

Question 1 Choisir la loi de X en indiquant sur quelle(s) hypothèse(s) ce choix s'appuie.

Question 2 Quelle est la probabilité que Bernard gagne au plus une partie ?

Question 3 Donner l'espérance de X et sa variance.

Question 4 Soit Y la variable aléatoire « Quantité d'argent déboursé par Gégé ». Donner la loi de probabilité de Y, son espérance et sa variance.

Question 5 On suppose maintenant que les deux joueurs enchaînent les parties sans limite de nombre. Soit Z la variable aléatoire « nombre de parties jouées jusqu'à la première victoire de Bernard » (en comptant la partie victorieuse). Donner la loi de probabilité de Z, son espérance et sa variance.

Rappel des lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\ldots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\ldots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\ldots,\}$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ