Contrôle continu : Statistique

Correction du sujet 1

Exercice 1

On considère une urne contenant 3 jetons rouges et 3 jetons bleus. Les jetons rouges portent les numéros 1, 2 et 4, alors que les jetons bleus portent les numéros 1, 1 et 5 (il y a donc deux jetons bleus portant un 1). Dans une première expérience, on tire un jeton dans l'urne. Si le jeton est rouge, on gagne la valeur indiquée sur le jeton en euros. Si le jeton est bleu, on perd la valeur indiquée sur le jeton en euros.

Question 1 Donner l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ associés au tirage.

Correction

En supposant les jetons discernables (c'est important pour les deux jetons bleus), on note R_1, R_2 et R_4 les jetons rouges, et B_1^1, B_1^2 et B_5 les jetons bleus. L'indice du jeton indique sa valeur. On a alors

$$\Omega = \{R_1, R_2, R_4, B_1^1, B_1^2, B_5\}.$$

Sans mention contraire dans l'énoncé, on prend comme probabilité la probabilité uniforme sur Ω. Donc pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, avec $|\Omega| = 6$ car il y a 6 jetons.

Question 2 On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte). Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.

Correction

On définit d'abord X comme une fonction sous la forme du tableau suivant :

ω	R_1	R_2	R_4	B_1^1	B_1^2	B_5
$X(\omega)$	1	2	4	-1	-1	-5

On constate ainsi que $X(\omega) = \{-5, -1, 1, 2, 4\}$. Pour calculer $\mathbb{P}(X = x)$, on utilise la définition $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\})$. Le seul cas non trivial est $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(\{B_1^1, B_1^2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car il y a deux jetons bleus portant le chiffre 1. On obtient ainsi

x	-5	-1	1	2	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

car pour toutes les autres valeurs de x, il n'y a qu'un jeton correspondant dans l'urne.

Question 3 Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$

Correction

On applique les définitions en utilisant la loi calculée à la question précédente. On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -5 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} \\ &= 0\end{aligned}$$

Pour $\mathbb{V}(X)$, on calcule d'abord $\mathbb{E}(X^2)$, soit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 25 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} \\ &= 8\end{aligned}$$

En appliquant la formule $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, on trouve $\mathbb{V}(X) = 8$.

Dans une deuxième expérience basée sur la même urne, on tire deux jetons successivement et sans remise. Si le joueur obtient deux jetons rouges, il gagne la somme des valeurs indiquées (en euros). S'il obtient deux jetons bleus, il perd la somme des valeurs indiquées. S'il obtient un jeton de chaque, on calcule la différence entre la valeur du jeton rouge et celle du jeton bleu. Le « gain » est alors cette différence (il peut donc être négatif).

Question 4 Donner l'univers Ω' et la probabilité $\mathbb{P}'$ associés au tirage.

Correction

L'univers est donné par

$$\Omega' = \{(j_1,j_2) \in \Omega^2 | j_1 \neq j_2\},$$

car chaque jeton est pris dans l'urne (représentée par l'univers de la première expérience), le tirage est successif (on a donc j_1 puis j_2) et enfin il n'y a pas de remise (donc $j_1 \neq j_2$). On reconnaît l'ensemble des arrangements de 2 jetons parmi les 6 qui forment Ω. On en déduit que $|\Omega'| = 6 \times 5 = 30$.

Comme dans la première question, on utilise la probabilité uniforme.

Question 5 On note Y la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte). Donner $Y(\Omega')$ et la loi de Y. Il est vivement conseillé de représenter les valeurs possibles de Y à partir du tirage sous forme d'un tableau.

Correction

Comme suggéré dans l'énoncé, on construit un tableau donnant les valeurs de Y en fonction du tirage. On représente j_1 en ligne et j_2 en colonne, sachant que la diagonale est impossible :

$Y((j_1,j_2))$	R_1	R_2	R_4	B_1^1	B_1^2	B_5
R_1		3	5	0	0	-4
R_2	3		6	1	1	-3
R_4	5	6		3	3	-1
B_1^1	0	1	3		-2	-6
B_1^2	0	1	3	-2		-6
B_5	-4	-3	-1	-6	-6	

On en déduit

$$Y(\Omega') = \{-6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 6\},$$

puis la loi

y	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	3	5	6
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$

Exercice 2

On étudie la clientèle d'un opérateur mobile. On s'intéresse en particulier à la variable aléatoire T

donnant la taille (en pouces) de la diagonale de l'écran du mobile d'un client pris au hasard dans l'ensemble des clients. Une étude indique que T suit la loi suivante :

t	4,7	5	5,2	5,5
$\mathbb{P}(T=t)$	a	b	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

On sait aussi que $\mathbb{E}(T) = \frac{615}{120}$.

Question 1 Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessus corresponde bien à une loi pour T.

Correction

On sait que $\mathbb{P}(T \in T(\Omega)) = 1$ et donc que

$$a + b + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} = 1,$$

soit $a + b = \frac{6}{12}$. De plus, par définition de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= 4{,}7 \times a + 5 \times b + 5{,}2 \times \frac{4}{12} + 5{,}5 \times \frac{2}{12},\\ &= \frac{47}{10}a + \frac{50}{10}b + \frac{208}{120} + \frac{110}{120},\\ &= \frac{47}{10}a + \frac{50}{10}b + \frac{318}{120}.\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(T) = \frac{615}{120}$ et donc $\frac{47}{10}a + \frac{50}{10}b = \frac{297}{120}$. En multipliant par $\frac{50}{10}$ l'équation $a + b = \frac{6}{12}$ et en soustrayant le résultat à l'équation précédente, on obtient $\frac{-3}{10}a = \frac{-3}{120}$, soit $a = \frac{1}{12}$ et $b = \frac{5}{12}$.

On s'intéresse au coût d'achat d'une coque pour téléphone. Pour simplifier, on ne considère qu'un seul fabricant et qu'un seul modèle par taille de téléphone. Les coques pour téléphone d'écran de diagonale inférieure ou égale à 5 pouces sont vendues 10 € par ce fabricant. Pour un écran de diagonale 5,2 pouces, le prix est de 12 € et enfin, pour un écran de taille 5,5 pouces, le prix de la coque est de 15 €.

On suppose pour simplifier qu'aucun client de l'opérateur ne possède de coque pour son téléphone. Soit X la variable aléatoire donnant le prix d'achat de la coque pour le téléphone d'un client pris au hasard dans l'ensemble des clients.

Question 2 Définir X sous la forme $X = f(T)$ en précisant la fonction f, par exemple sous forme d'un tableau.

Correction

La fonction f associe à une taille d'écran le prix de la coque. On peut donc écrire f sous la forme du tableau suivant :

t	4,7	5	5,2	5,5
$f(t)$	10	10	12	15

Question 3 Déterminer la loi de X.

Correction

On constate que $X(\Omega) = \{10, 12, 15\}$. Pour calculer $\mathbb{P}(X = x)$, on applique la définition en fonction de T. On donc $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(T \in f^{-1}(\{x\}))$. Le seul cas complexe est celui de $x = 10$ car $f^{-1}(\{10\}) = \{4{,}7; 5\}$, et donc $\mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(T \in \{4{,}7; 5\})$, soit $\mathbb{P}(X = 10) = a + b = \frac{6}{12}$. On trouve ainsi la loi de X :

x	10	12	15
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

Question 4 Donner $\mathbb{E}(X)$.

Correction

On applique simplement la formule, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 10 \times \frac{6}{12} + 12 \times \frac{4}{12} + 15 \times \frac{2}{12},\\ &= \frac{138}{12} = \frac{23}{2}.\end{aligned}$$

L'opérateur souhaite inciter ses clients à choisir un forfait plus coûteux en offrant un bon d'achat de 10 € pour une coque (quel que soit le coût de la coque). Il constate que la probabilité d'accepter cette offre dépend de la diagonale de l'écran. Soit Z la variable aléatoire indiquant si un client pris au hasard accepte l'offre (dans ce cas Z vaut 1 et 0 dans le cas contraire). On constate que

t	4,7	5	5,2	5,5
$\mathbb{P}(Z = 1 \mid T = t)$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Question 5 Déterminer la loi de Z.

Correction

Z est donnée conditionnelle à T et on connaît la loi de T. Il suffit donc d'appliquer la loi des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(Z = 1)$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(Z = 1 \mid T = 4{,}7)\mathbb{P}(T = 4{,}7) + \mathbb{P}(Z = 1 \mid T = 5)\mathbb{P}(T = 5) + \mathbb{P}(Z = 1 \mid T = 5{,}2)\mathbb{P}(T = 5{,}2)\\ &\quad + \mathbb{P}(Z = 1 \mid T = 5{,}5)\mathbb{P}(T = 5{,}5),\\ &= a + b + \frac{3}{4}\frac{4}{12} + \frac{1}{2}\frac{2}{12},\\ &= \frac{10}{12}.\end{aligned}$$

De plus, comme Z vaut seulement 1 ou 0, on en déduit que Z suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est donc $p = \frac{5}{6}$.

Question 6 À quelle dépense totale l'opérateur peut-il s'attendre avec cette offre en supposant qu'il a 12 millions de clients ?

Correction

On répète 12 millions de fois un tirage Bernoulli de paramètre $p = \frac{5}{6}$. En supposant les clients indépendants, le nombre d'offres acceptées est donc donnée par une loi Binomiale de paramètre $n = 12$ millions et $p = \frac{10}{12}$. Son espérance est alors de np, soit un nombre total de 10 millions d'acceptations. L'offre coûte ainsi 100 millions €.

Exercice 3

Deux joueurs, Alice et Bob, s'affrontent sur un jeu de stratégie en ligne. Le jeu est organisé en tours successifs. Dans chaque tour, un joueur peut attaquer une ou plusieurs fois son adversaire.

Alice dispose d'une arme lui permettant de tenter d'atteindre Bob trois fois par tour de jeu (elle a donc trois attaques par tour). La probabilité de toucher Bob est de $\frac{1}{3}$ pour chaque attaque. Les attaques sont supposées indépendantes. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'attaques d'Alice qui touchent Bob lors d'un tour de jeu.

Question 1 Donner la loi de X et préciser son (ou ses) paramètre(s).

Correction

Alice réalise trois attaques indépendantes et de même probabilité de succès $\frac{1}{3}$. X indique le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$.

Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si au moins une attaque d'Alice a touché Bob dans le tour, et 0 sinon.

Question 2 Donner la loi de Y et préciser son (ou ses) paramètre(s).

Correction

Y est une variable qui prend seulement les valeurs 0 ou 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(Y = 1)$. Or, $Y = 1$ si $X \geq 1$ (si on a au moins un succès) et donc $Y = 0$ si $X = 0$. Or $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3$ en utilisant les formules de la loi binomiale. On a donc $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{8}{27}$ et donc $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{19}{27}$. Finalement Y est donc une variable de Bernoulli de paramètre $p = \frac{19}{27}$.

On suppose les tours indépendants et on définit la variable Z comme le nombre de tours que doit faire Alice jusqu'à ce qu'une de ses attaques touche Bob (le tour concerné est inclus dans le décompte).

Question 3 Donner la loi de Z, son (ou ses) paramètre(s) et son espérance.

Correction

Les tours sont indépendants et la probabilité d'avoir au moins un succès est fixe. On répète donc l'expérience de Bernoulli correspondant à Y jusqu'à obtenir un succès. Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p = \frac{19}{27}$. Son espérance est de $\frac{1}{p}$, soit $\frac{27}{19}$.

Bob ne peut faire qu'une seule attaque par tour, avec une probabilité de toucher Alice de $\frac{1}{2}$. Quand Bob touche Alice, il fait 5 points de dégâts. Chaque attaque réussie d'Alice sur Bob effectue 3 points de dégâts. Soit A la variable aléatoire indiquant le total des dégâts effectués par Alice en un tour et B la variable aléatoire indiquant le total des dégâts effectués par Bob en un tour.

Question 4 Calculer $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(B)$ en exprimant A et B comme des fonctions simples de variables aléatoires comptant les attaques réussies par Alice et Bob.

Correction

A donne le total des dégâts effectués par Alice dans un tour. Or, X (question 1) donne le nombre d'attaques fructueuse d'Alice dans un tour. Comme chaque attaque cause 3 points de dégâts, on a $A = 3X$. De ce fait $\mathbb{E}(A) = 3\mathbb{E}(X)$. Or X est une loi binomiale $B(3, \frac{1}{3})$ et son espérance est donc $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$. On a donc $E(A) = 3$.

Le cas de B est plus simple car Bob ne fait qu'une attaque par tour. Soit U la variable de Bernoulli $B(\frac{1}{2})$ indiquant le nombre d'attaque réussie par Bob (donc 1 ou 0). On a clairement $B = 5U$ et donc $\mathbb{E}(B) = 5\mathbb{E}(U)$. Or $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}$ et donc $\mathbb{E}(B) = \frac{5}{2}$, ce qui donne un léger avantage à Alice.