L2 sciences économiques **Année universitaire 2012–2013**
Université Paris 1

Partiel de statistiques
Mardi 16 avril – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions, sans évaluer les fonctions usuelles comme exp ou ln. Si les notations C_n^p, A_n^p et/ou $\binom{n}{p}$ sont utilisées, leur définitions en fonction de la factorielle devront être rappelées.

Exercice 1 (*5 points*)

On étudie un paquet de cartes un peu particulières. Chaque carte comporte un (et un seul) symbole. Les symboles diffèrent par leur forme et leur couleur. Il y a trois formes (le carré, le disque et le triangle) et deux couleurs (noir et rouge). Il existe, par exemple, des cartes comportant un carré rouge, d'autres un disque noir, etc. Plus précisément le paquet étudié contient le nombre de cartes indiqué dans le tableau ci-dessous :

Couleur/Forme	Carré	Disque	Triangle
Noir	2	4	1
Rouge	3	1	2

Il y a, par exemple, 4 cartes avec un disque noir. L'ensemble des cartes est noté C.

Question 1 On tire au hasard successivement et sans remise 3 cartes dans le paquet. Donner l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

Question 2 Calculer la probabilité d'obtenir uniquement des cartes portant un disque noir.

Question 3 Calculer la probabilité de n'obtenir aucune carte portant un symbole noir.

Question 4 Calculer la probabilité d'obtenir exactement une carte avec un carré rouge.

Exercice 2 (*8 points*)

Comme dans l'exercice 1, on considère des cartes portant un unique symbole coloré. Il y a toujours trois formes (le carré, le disque et le triangle) et deux couleurs (noir et rouge). On choisit une carte au hasard dans un paquet : on désigne par F la variable aléatoire donnant la forme obtenue et par C la variable aléatoire donnant la couleur du symbole. On suppose que le paquet est tel que la loi jointe du couple (F, C) est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(C = c, F = f)$	$f =$ Carré	$f =$ Disque	$f =$ Triangle
$c =$ Noir	0,1	0,2	0,05
$c =$ Rouge	0,2	0,15	0,3

Question 1 Déterminer les lois marginales de C et F.

Question 2 Montrer que les deux variables ne sont pas indépendantes.

Question 3 Déterminer la loi conditionnelle de F sachant $C =$ Rouge.

Un casino utilise le paquet de cartes étudié ci-dessus pour divers jeux de hasard. Dans un premier jeu, le joueur choisit une carte au hasard dans le paquet. Il gagne 1 € si la carte obtenue porte comme symbole un disque noir, ou un triangle de n'importe quelle couleur. Il perd 1 € dans les autres cas.

Question 4 On appelle G la variable aléatoire du gain du joueur pour une partie (le gain est donc négatif en cas de carte perdante). Donner la loi de G, son espérance et sa variance.

Question 5 Un joueur persévérant décide de jouer jusqu'à gagner une fois. Soit T la variable aléatoire donnant le nombre de cartes tirées jusqu'à obtenir une carte gagnante en comptant la carte gagnante (on suppose que les tirages successifs se font avec remise de la carte précédente dans le paquet, de sorte que la loi jointe du couple (F, C) n'est pas modifiée au cours du jeu). Donner la loi de T et son espérance. Quel est le gain moyen d'un joueur persévérant qui s'arrête à la première carte gagnante ?

Le casino propose un deuxième jeu (les questions suivantes sont indépendantes des deux précédentes). Comme dans le premier jeu, le joueur tire une carte dans le paquet. Les gains et pertes associés aux différents symboles sont donnés dans le tableau suivant :

gain	f = Carré	f = Disque	f = Triangle
c = Noir	-2 €	1 €	3 €
c = Rouge	-1 €	-1 €	0 €

Question 6 On appelle U la variable aléatoire du gain du joueur pour un tirage à ce jeu. Donner $U(\Omega)$ puis la loi de U.

Question 7 Calculer l'espérance de U.

Question 8 Calculer la probabilité de l'évènement $U > 0$ sachant que la carte tirée ne comporte ni un triangle noir, ni un carré rouge.

Exercice 3 (*3,5 points*)

Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi normale de moyenne 2 et d'écart-type 2.

Question 1 Calculer la probabilité que X soit supérieure ou égale à 4,5.

Question 2 Calculer la probabilité de X soit dans l'intervalle $[1; 4{,}5]$.

Question 3 Déterminer une valeur t telle que $\mathbb{P}(X \geq t) = 0{,}33$.

Exercice 4 (*3,5 points*)

Étant donnés deux nombres réels a et b, on définit la fonction F comme suit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ a(x+1) & \text{si } x \in]-1, 0], \\ bx + a & \text{si } x \in]0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Question 1 Rappeler les conditions que F doit respecter pour qu'elle soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue. En déduire des conditions correspondantes sur a et b.

Question 2 On suppose les conditions vérifiées et on considère X une variable aléatoire continue avec F comme fonction de répartition. On suppose que $\mathbb{P}(X \leq 0{,}5) = \frac{5}{8}$. En déduire a et b.

Question 3 En utilisant les valeurs trouvées à la question précédente, calculer $\mathbb{E}(X)$.

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\dots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\dots,\}$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b] \\ 1 & \text{si } x\geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x)=\begin{cases} \lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$