L2 sciences économiques **Année universitaire 2013 – 2014**
Université Paris 1

Partiel de statistiques
Mardi 29 avril – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions, sans évaluer les fonctions usuelles comme exp ou ln. Si les notations C_n^p, A_n^p et/ou $\binom{n}{p}$ sont utilisées, leurs définitions en fonction de la factorielle devront être rappelées.

Exercice 1 (*2 points*)

Un investisseur cherche à évaluer la pertinence d'un placement financier. Le rendement de cet investissement sur un an (combien l'investisseur va gagner ou perdre en 1 an) est donné par une variable aléatoire R qui suit une loi normale d'espérance $\frac{2}{3}$ et d'écart-type $\frac{1}{2}$, l'unité étant le million d'euros.

Question 1 Quelle est la probabilité que son rendement se trouve entre 0 et $\frac{4}{3}$ d'un million ?

Question 2 L'investisseur, d'humeur optimiste, cherche maintenant à déterminer le rendement minimal auquel il peut s'attendre dans les 10 % de cas les plus favorables, c'est-à-dire qu'il cherche r tel que $\mathbb{P}(R \geq r) = 0{,}10$. Déterminez r.

Exercice 2 (*4 points*)

Les variables aléatoires X et Y sont telles que $X(\Omega) = \{0{,}5\}$ et $Y(\Omega) = \{-10{,}0{,}10\}$. On sait que :
- $\mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{1}{6}$;
- $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 5) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 5) = \frac{1}{3}$.

Question 1 Déterminez $\mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 0)$ et $\mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 5)$.

Question 2 Les valeurs 0 et 5 sont par ailleurs équiprobables pour X. Donnez la loi de X, puis la loi jointe de $(X{,}Y)$, et la loi de Y.

Question 3 Calculez la covariance de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (*6 points*)

On étudie le jeu de hasard suivant. On dispose de deux dés non truqués, un premier dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 et un second dé à 8 faces numérotées de 1 à 8. Une manche du jeu consiste à lancer 5 fois de suite les deux dés. Le joueur remporte la manche si au moins l'une des deux conditions suivantes est remplie :

1. il obtient au moins une fois une valeur supérieure ou égale à 11 en ajoutant les valeurs des deux dés ;
2. il obtient exactement une fois un double 4.

Question 1 Déterminez l'univers Ω correspondant à une manche du jeu (les 5 lancers) et indiquez quelle probabilité $\mathbb{P}$ modélise bien l'expérience aléatoire.

Question 2 On étudie d'abord le cas simplifié dans lequel seule la première condition ci-dessus donne une victoire : déterminez la probabilité d'obtenir au moins une fois sur les 5 lancers une valeur supérieure ou égale à 11 en ajoutant les valeurs des deux dés (on note A l'évènement correspondant).

Question 3 On étudie de la même façon le cas simplifié dans lequel seule la deuxième condition ci-dessus donne une victoire : déterminez la probabilité d'obtenir exactement une fois un double 4 sur les 5 lancers (on note B l'évènement correspondant).

Question 4 Soit C l'évènement correspondant à une victoire en tenant compte des deux conditions. Donnez un exemple d'évènement élémentaire (donc un résultat des 5 lancers) qui montre que $\mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Question 5 Déterminez la probabilité de l'évènement $\overline{A} \cap B$.

Question 6 Déduire des questions précédentes la probabilité de victoire en tenant compte des deux conditions. On pourra utiliser le fait que pour tous ensembles U et V, $U \cup V$ est l'union disjointe de U et de $\overline{U} \cap V$.

Exercice 4 (*5 points*)

On étudie un jeu de hasard dans lequel la probabilité de remporter une manche est notée $p = \frac{1}{2}$. On s'intéresse à un joueur qui enchaîne plusieurs manches du jeu. Les manches sont considérées comme indépendantes.

Question 1 Un joueur enchaîne 5 manches du jeu. Calculez sa probabilité de gagner exactement deux fois. Combien le joueur gagne-t-il de manches en moyenne ? Pour traiter ces questions, il est conseillé d'introduire une variable aléatoire X donnant le nombre de manches gagnées.

Question 2 Un joueur enchaîne les manches jusqu'à en remporter une. Calculer sa probabilité de jouer au plus trois manches. Combien de manches enchaîne-t-il en moyenne avant de s'arrêter ? On pourra introduire une variable aléatoire Y donnant le nombre de manches jouées jusqu'à la première remportée.

On suppose maintenant que pour jouer une manche, il faut payer 1 €. Si on gagne la manche, on remporte 2 €, sinon, on ne gagne rien. Le gain net du joueur après une manche est donc soit 1 € en cas de manche remportée, soit -1 € en cas de manche perdue.

Question 3 On note Z la variable aléatoire du gain net total d'un joueur enchaînant 5 manches de jeu (on note Ω l'univers associé à ces 5 manches). Donnez la loi de Z en précisant $Z(\Omega)$ et la valeur de $\mathbb{P}(Z = z)$ pour tout $z \in Z(\Omega)$. Calculez l'espérance de Z. On pourra s'aider de la variable X introduite à la question 1.

Question 4 On considère un joueur disposant de 5 €. Le joueur enchaîne les manches et s'arrête soit à sa première victoire, soit quand il n'a plus d'argent. On note W la variable aléatoire donnant la quantité d'argent dont dispose le joueur après s'être arrêté. Par exemple si le joueur perd la première manche et gagne la seconde, il dispose alors de $W = 5$ € car il a payé deux fois 1 € pour jouer et a gagné une fois 2 €. Déterminez une fonction g telle que $W = g(Y)$ où Y est la variable aléatoire introduite à la question 2.

Question 5 Déterminez la loi de W en procédant comme à la question 3, c'est-à-dire en donnant $P(W = w)$ pour tout $w \in W(\Omega')$, où Ω' désigne l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Exercice 5 (*3 points*)

La fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue X est définie comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - x^2 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 3x - \frac{5}{4} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ 1 & \text{si } x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Question 1 Donnez la densité de X.

Question 2 Calculez $\mathbb{P}(X \in]\frac{1}{4},\frac{5}{8}[)$.

Question 3 Calculez $\mathbb{E}(X)$.

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\ldots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\ldots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\ldots,\}$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $F(k)=1-(1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$