L2 sciences économiques **Année universitaire 2011–2012**

Université Paris 1

Partiel de statistique

Samedi 5 mai – Durée 2 heures

Correction du sujet 1

Exercice 1

Question 1 On note $N = \{N_1, \ldots, N_{13}\}$ les treize noms. L'univers est alors

$$\Omega = \{(m_1, m_2, m_3, m_4) \in N^4 \mid m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des quadruplets contenant des noms distincts choisis dans N. On a $|\Omega| = A_{13}^4$ et on prend sur Ω la probabilité uniforme.

Question 2 On choisit donc les 4 ministres dans les tendances B et C, soit parmi 7 candidats. On a donc A_7^4 possibilités, soit une probabilité de

$$\frac{A_7^4}{A_{13}^4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{13 \times 12 \times 11 \times 10} = \frac{840}{17160} = \frac{7}{143} \simeq 0.049.$$

Question 3 On choisit uniquement des ministres de la tendance A, ce qui donne A_6^4 possibilités et une probabilité de

$$\frac{A_6^4}{A_{13}^4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{17160} = \frac{360}{17160} = \frac{3}{143} \simeq 0.021.$$

Question 4 On a déjà calculé la probabilité de U (question 1). Pour l'évènement V, on procède de la même façon : n'obtenir aucun élément de B, c'est choisir les 4 ministres dans les tendances A et C, soit parmi 9 choix. On a donc A_9^4 possibilités, ce qui donne

$$\mathbb{P}(V) = \frac{A_9^4}{A_{13}^4}.$$

Or l'évènement $U \cap V$ correspond à n'obtenir que des représentants de la tendance C. Mais ceci n'est pas possible car il n'y a que trois membres dans cette tendance. De ce fait $\mathbb{P}(U \cap V) = 0 \neq \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)$ et les évènements ne sont pas indépendants.

Attention, si on se contente d'écrire que $\mathbb{P}(U \cap V) = 0$ la réponse est fausse car on pourrait très bien avoir $\mathbb{P}(U) = 0$ ou $\mathbb{P}(V) = 0$.

Question 5 On considère les quadruplets dont le deuxième élément est fixé comme étant un élément de B. Pour constituer un tel quadruplet il faut choisir un élément de B (4 possibilités) puis choisir un triplet (ordonné donc) dans les 12 candidats restants (A_{12}^3 possibilités). On a donc $4 \times A_{12}^3$ possibilités et une probabilité de

$$\frac{4 \times A_{12}^3}{A_{13}^4} = \frac{4 \times 12 \times 11 \times 10}{13 \times 12 \times 11 \times 10} = \frac{4}{13} \simeq 0.31.$$

Question 6 Le plus simple est de considérer le complémentaire de l'évènement étudié : obtenir au plus deux tendances. On décompose l'évènement en six sous-évènements disjoints :

1. obtenir uniquement des A : A_6^4 possibilités ;
2. obtenir uniquement des B : $A_4^4 = 4!$ possibilité ;
3. obtenir uniquement des C : évènement impossible ;

4. obtenir des A et des B : $A_9^4 - A_6^4$ possibilités (il faut enlever les quadruplets contenant seulement des A) ;
5. obtenir des A et des C : $A_{10}^4 - A_6^4 - 4!$ possibilités (on enlève encore les cas avec une seule tendance) ;
6. obtenir des B et des C : $A_7^4 - 4!$ possibilités (toujours la même chose).

Donc le nombre de possibilités est

$$A_6^4 + 4! + A_9^4 - A_6^4 + A_{10}^4 - A_6^4 - 4! + A_7^4 - 4! = A_{10}^4 + A_9^4 + A_7^4 - A_6^4 - 4! = 8520,$$

et donc la probabilité recherchée est

$$1 - \frac{8520}{A_{13}^4} = 1 - \frac{71}{143} = \frac{72}{143} \simeq 0.50$$

Attention, les stratégies constructives ne fonctionnent en général pas car on compte plusieurs fois la même chose...

Exercice 2

Question 1 On applique la loi des probabilités totales qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z) &= \mathbb{P}(Z|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Z|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(Z|C)\mathbb{P}(C),\\ &= 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}3,\\ &= 0{,}31.\end{aligned}$$

Question 2 On applique la règle de Bayes qui donne

$$\mathbb{P}(B|Y) = \frac{\mathbb{P}(Y|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(Y)}.$$

On calcule $\mathbb{P}(Y)$ par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y) &= \mathbb{P}(Y|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Y|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(Y|A)\mathbb{P}(B),\\ &= 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}3,\\ &= 0{,}46.\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(B|Y) = \frac{0{,}6 \times 0{,}5}{0{,}46} \simeq 0{,}65.$$

Question 3 Il nous manque simplement la probabilité de X qui est obtenue par

$$\mathbb{P}(X) = 1 - \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(Z) = 1 - 0{,}46 - 0{,}31 = 0{,}23.$$

La loi de D est alors donnée par le tableau suivant :

d	1	1,5	2
$\mathbb{P}(D = d)$	0,31	0,23	0,46

Question 4 L'évènement $\{D \geq 1{,}5\}$ est égal à $\{X \text{ ou } Y\}$. On cherche donc $\mathbb{P}(X \cup Y|\overline{C})$. Par définitions et propriétés classiques :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \cup Y|\overline{C}) &= \frac{\mathbb{P}((X \cup Y) \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{C})}, \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \cap \overline{C}) + \mathbb{P}(Y \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}, \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \cap A) + \mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(Y \cap A) + \mathbb{P}(Y \cap B)}{0{,}7}, \\
&= \frac{\mathbb{P}(X|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(Y|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Y|B)\mathbb{P}(B)}{0{,}7}, \\
&= \frac{0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}5}{0{,}7}, \\
&= \frac{0{,}57}{0{,}7}, \\
&\simeq 0{,}81.
\end{aligned}$$

Question 5 On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D) &= 1 \times 0{,}31 + 1{,}5 \times 0{,}23 + 2 \times 0{,}46, \\
&= 1{,}575,
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D^2) &= 1^2 \times 0{,}31 + (1{,}5)^2 \times 0{,}23 + 2^2 \times 0{,}46, \\
&= 2{,}6675,
\end{aligned}$$

soit donc, en utilisant $V(D) = \mathbb{E}(D^2) - (\mathbb{E}(D))^2$, $V(D) = 0{,}186875$.

Exercice 3

Question 1 Comme X est le challenger, son élection est l'évènement contraire de la réélection du sortant et la probabilité cherchée est donc de $1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

Question 2 X n'étant plus le challenger, sa réélection se fait avec une probabilité 0,55. Pour qu'il fasse deux autres mandats, il faut qu'il soit réélu deux fois puis qu'il perde. Comme les élections sont indépendantes, on se trouve en présence d'une loi géométrique de probabilité $p = 0{,}45$, puisqu'on cherche le premier échec. La probabilité recherchée est alors la probabilité d'obtenir $k = 3$ avec la loi géométrique considérée, soit donc $0{,}45 \times (0{,}55)^2 = 0{,}136$.

Exercice 4

Question 1 On pose $X = \frac{T-1{,}82}{0{,}1}$ qui suit donc une loi normale $\mathcal{N}(0{,}1)$. $T \geq 1{,}92$ est équivalent $X \geq 1$. Or

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - F_X(1).$$

D'après la table, $F_X(1) = 0{,}8413$ et donc $\mathbb{P}(T \geq 1{,}92) = 0{,}1587$.

Question 2 $T \leq 1{,}68$ est équivalent à $X \leq -1{,}4$. Or, par symétrie de la loi normale $F_X(-1{,}4) = 1 - F_X(1{,}4)$. La table donne $F_X(1{,}4) = 0{,}9192$ donc $\mathbb{P}(T \leq 1{,}68) = 0{,}0808$.

Question 3 $T \in [1{,}82-\alpha, 1{,}82+\alpha]$ est équivalent à $X \in [-\frac{\alpha}{0{,}1}, \frac{\alpha}{0{,}1}]$. On cherche donc un intervalle symétrique autour de 0 sur X de probabilité 0,8, soit donc

$$\begin{aligned}0{,}8 &= \mathbb{P}(X \in [-\lambda{,}\lambda]),\\ &= F_X(\lambda) - F_X(-\lambda),\\ &= 2F_X(\lambda) - 1,\\ 0{,}9 &= F_X(\lambda).\end{aligned}$$

La lecture de la table donne $\lambda \simeq 1{,}28$ (pour une probabilité de 0,8997). On en déduit $\alpha = 0{,}1 \times 1{,}28 = 0{,}128 \simeq 0{,}13$.

Exercice 5

Question 1 Il suffit de sommer sur les lignes ou les colonnes en fonction de la variable considérée. On obtient

a	u	v	w
$\mathbb{P}(A=a)$	0,3	0,3	0,4

et

b	x	y
$\mathbb{P}(B=b)$	0,6	0,4

Question 2 On constate que $\mathbb{P}(A=u, B=x) = 0{,}2$ alors que $\mathbb{P}(A=u)\mathbb{P}(B=x) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$. Or, il faudrait que $\mathbb{P}(A=a, B=b) = \mathbb{P}(A=a) \times \mathbb{P}(B=b)$ pour tout a et tout b pour que A et B soient indépendantes.

Question 3 On reprend le tableau de la loi jointe pour déterminer les valeurs de C :

$(A=a, B=b)$	$b=x$	$b=y$
$a=u$	$C=1+3=4$	$C=1+2=3$
$a=v$	$C=2+3=5$	$C=2+2=4$
$a=w$	$C=1+3=4$	$C=1+2=3$

Ainsi, $C(\Omega) = \{3, 4, 5\}$.

Question 4 La loi de C s'obtient à partir des deux tableaux, à savoir celui de la loi jointe et celui ci dessus. On obtient

c	3	4	5
$\mathbb{P}(C=c)$	0,2	0,7	0,1

L'espérance est alors donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C) &= 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}7 + 5 \times 0{,}1\\ &= 3{,}9.\end{aligned}$$