L2 sciences économiques **Année universitaire 2011–2012**
Université Paris 1

Partiel de statistique
Samedi 5 mai – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions, sans évaluer les fonctions usuelles comme exp ou ln.

Exercice 1 (*6 points*)

Le nouveau président de la République nomme un(e) Premier ministre chargé(e) de former un gouvernement. Pour les 4 ministères les plus importants, le Premier ministre cherche à représenter de façon équitable les 3 grandes tendances du parti du président, notées A, B, et C. On compte 6 candidats pour un ministère dans la tendance A, 4 dans la tendance B et 3 dans la tendance C. Le Premier ministre place dans un chapeau les noms des candidats écrits sur des cartons strictement identiques, puis tire successivement et sans remise 4 noms, dans l'ordre protocolaire du futur gouvernement [1].

Question 1 Définir avec précision l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ associés à l'expérience aléatoire.

Question 2 Calculer la probabilité de n'obtenir aucun membre de la tendance A dans les quatre ministres.

Question 3 Calculer la probabilité d'obtenir uniquement des ministres de la tendance A.

Question 4 Montrer que les évènements $U = \{$n'obtenir aucun membre de $A\}$ et $V = \{$n'obtenir aucun membre de $B\}$ ne sont pas indépendants en justifiant soigneusement la réponse.

Question 5 Calculer la probabilité que le deuxième ministre (dans l'ordre du tirage des 4 ministères) appartienne à la tendance B.

Question 6 Calculer la probabilité d'obtenir au moins un ministre de chaque tendance.

Exercice 2 (*5 points*)

Une élection oppose trois candidats, A, B, et C dans un scrutin uninominal à un seul tour (on ne considère pas le vote blanc). Un sondage donne les intentions de vote suivantes qu'on considère comme la probabilité de l'emporter pour chacun des candidats :

Candidat	A	B	C
Intentions de vote	20 %	50 %	30 %

Un groupe de votants s'intéresse à une question de société pour laquelle trois mesures sont envisageables, notées X, Y et Z. En analysant les discours des trois candidats, le groupe établit les probabilités de choix de chacune des mesures en fonction du candidat élu :

Mesure	X	Y	Z
Candidat A	10 %	50 %	40 %
Candidat B	30 %	60 %	10 %
Candidat C	20 %	20 %	60 %

1. Il s'agit de l'ordre d'importance des ministres.

Dans les questions qui suivent, vous pouvez vous contenter de donner les formules complètes des calculs sans mener ces calculs jusqu'au bout, à condition que les formules obtenues ne fassent plus intervenir que des nombres (pas de grandeur inconnue).

Question 1 Calculer la probabilité que la mesure Z soit prise.

Question 2 Calculer la probabilité que le candidat B ait été élu sachant que la mesure Y a été prise.

Un chiffrage du coût des trois mesures en millions d'euros est donné dans le tableau suivant :

Mesure	X	Y	Z
Coût	1,5	2	1

On définit à partir de ce tableau la variable aléatoire D correspondant au coût de la mesure prise après l'élection.

Question 3 Donner la loi de D.

Question 4 Calculer la probabilité que D soit supérieure ou égale à 1,5 sachant que C n'a pas été élu.

Question 5 Calculer l'espérance de D et sa variance.

Exercice 3 (*2 points*)

On suppose que la probabilité de réélection d'un président sortant est de 0,55 à chaque fois qu'il se représente quel que soit son adversaire. On suppose qu'un mandat dure 5 ans et qu'il n'y a pas de limite légale au nombre de mandats successifs. On suppose enfin que chaque élection est indépendante des autres.

Question 1 Soit le candidat X qui n'a jamais été président. Donner sa probabilité d'être élu à la prochaine élection si le président en exercice, Y, se représente.

Question 2 On considère maintenant X en poste. Donner la probabilité que X fasse exactement 2 mandats de plus que le mandat courant, en supposant qu'il se représente après chaque mandat. On ne tiendra pas compte d'un éventuel décès du président.

Exercice 4 (*3 points*)

La taille moyenne des présidents de la cinquième République est d'environ 1,82 m. L'écart-type de ces tailles est d'environ 0,10 m. Soit T une variable aléatoire distribuée selon la loi Normale utilisant comme moyenne et écart-type les grandeurs mesurées sur nos présidents.

Question 1 Calculer la probabilité que T soit plus grand que 1,92.

Question 2 Calculer la probabilité que T soit plus petit que 1,68.

Question 3 Déterminer un intervalle symétrique autour de 1,82 (donc de la forme $[1{,}82 - \alpha, 1{,}82 + \alpha]$) contenant T dans 80 % des cas.

Exercice 5 (*4 points*)

Deux mesures importantes vont être votées au Parlement. La mesure A comporte trois choix u, v et w. La mesure B comporte deux choix x et y. Un sondage donne les préférences suivantes dans la population :

$\mathbb{P}(A = a, B = b)$	$b = x$	$b = y$
$a = u$	20%	10%
$a = v$	10%	20%
$a = w$	30%	10%

On considère le résultat du vote comme un couple de variables aléatoires (A,B) dont la loi jointe est donnée par le sondage.

Question 1 Calculer les lois marginales de A et B.

Question 2 Montrer que A et B ne sont pas indépendantes.

Un chiffrage des différentes options donne les coûts suivants en millions d'euros :

Option	u	v	w	x	y
Coût	1	2	1	3	2

Soit C la variable aléatoire correspondant au coût total des deux options choisies (celle pour A et celle pour B).

Question 3 Déterminer $C(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour C.

Question 4 Déterminer la loi de C puis son espérance.

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\ldots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\ldots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\ldots,\}$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$