Université Paris 1 – Panthéon – Sorbonne

UFR 02 - L2 Économie

Statistiques – Cours de Fabrice Rossi

Séances de TD

Équipe pédagogique :

Anne-Sophie	Dufernez
Emmanuelle	Lavaine
Vincent	Lignon
Esther	Regnier
Linas	Tarasonis

1 Dénombrement et équiprobabilité

Exercice 1.1
Trois nouvelles séries sont proposées par une chaîne de télévision. Pour chacune d'entre elles, la chaîne diffuse un épisode pilote et, en fonction de l'appréciation du public, la chaîne décidera de diffuser la suite des séries. On considère les évènements suivants : $E_i =$"l'épisode pilote de la série i a été apprécié par le public" ($i = 1, 2, 3$). Exprimer les évènements suivants en fonction de E_i, $\overline{E}_i$ et des opérateurs $\cap$ et $\cup$:

$A =$"tous les épisodes ont été appréciés" ;
$B =$"aucun épisode n'a été apprécié" ;
$C =$"au moins un épisode a été apprécié" ;
$D =$"au moins un épisode n'a pas été apprécié" ;
$E =$"au plus un épisode a été apprécié" ;
$F =$"le seul épisode apprécié a été celui de la première série".

Exercice 1.2
Une certaine expérience aléatoire est modélisée par l'ensemble fondamental Ω et la probabilité $\mathbb{P}$. On considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,8$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$. Calculer les probabilités de $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Remarque : pour chacun des exercices suivants, on commencera par décrire l'ensemble fondamental Ω et par définir une mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Exercice 1.3
On considère deux lancers successifs d'un dé non-pipé. Calculer les probabilités des évènements suivants :

$A =$"la somme des faces est strictement supérieure à 8" ;
$B =$"le même chiffre est obtenu lors des deux lancers" ;
$C =$"des chiffres pairs sont obtenus lors des deux lancers".

Exercice 1.4
La carte d'un restaurant contient 30 plats : 8 entrées (numérotées de 1 à 8), 16 plats (numérotés de 9 à 24) et 6 desserts (numérotés de 25 à 30). Pour constituer une "formule repas", un client doit tirer au hasard deux jetons parmi les 30. Calculer la probabilité de constituer un repas "entrée+plat" ou "plat+dessert", lorsque :

1. on tire les deux jetons simultanément.
2. on tire les deux jetons successivement et sans remise.
3. on tire les deux jetons successivement et avec remise.

Exercice 1.5
Le programme d'une épreuve d'examen comporte 30 sujets. Chaque candidat tire trois sujets au hasard. Quelle est la probabilité, n'ayant étudié que le tiers des sujets,

1. d'avoir préparé les trois sujets ?
2. d'avoir préparé deux des sujets ?
3. de n'en avoir préparé aucun ?
4. d'en avoir préparé au moins un ?

Exercice 1.6
On considère un jeu standard de 32 cartes. On a ainsi huit rangs (sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi, as) et quatre couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle). On tire simultanément et au hasard cinq cartes (une main). Calculer :

1. la probabilité d'obtenir au moins un carreau ;
2. la probabilité d'obtenir des cartes de deux couleurs au plus ;
3. la probabilité d'obtenir une double paire, mais ni carré, ni full (un carré correspond à quatre cartes de même rang, un full correspond à deux cartes de même rang et trois cartes de même rang) ;
4. la probabilité d'obtenir une suite (cinq cartes dont les rangs se suivent) ;
5. la probabilité d'obtenir une suite royale (cinq cartes de la même couleur dont les rangs se suivent).

2 Conditionnement et indépendance

Exercice 2.1
Un questionnaire à choix multiples propose quatre réponses pour chaque question. Soit $p = 0,3$ la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. Si l'étudiant ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quel est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 2.2
Une urne contient huit boules blanches et six boules rouges. On tire une boule au hasard, puis on la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. Sachant que la deuxième boule tirée est rouge, quelle est la couleur la plus probable pour la première boule ?

Exercice 2.3
Une compagnie d'assurances répartit ses clients en trois classes de risque : R_1 (risque faible), R_2 (risque moyen) et R_3 (risque élevé). Les effectifs de chaque classe représentent 20%, 50% et 30% de la population totale. Les probabilités d'avoir un accident dans l'année pour chacune des classes sont $0,05$, $0,15$ et $0,30$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard ait un accident dans l'année ?

2. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit dans la classe de risque faible R_1 ?

Exercice 2.4
Lors des élections, le candidat A l'emporte avec 60% des votes. Des sondages réalisés antérieurement ont montré que 70% des femmes et 45% des hommes allaient voter pour le candidat A.

1. En supposant qu'il n'y ait eu aucun vote blanc et 0% d'abstention, calculer la proportion des hommes parmi les votants.
2. On choisit au hasard un bulletin de vote et il porte le nom d'un autre candidat que le candidat A. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du vote d'une femme ?

Exercice 2.5

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard et on considère les événements A ="tirage d'un nombre pair" et B ="tirage d'un multiple de trois". Montrer que les événements A et B sont indépendants.
2. On rajoute dans l'urne une boule numérotée 13 et on recommence l'expérience. Est-ce que les événements A et B sont toujours indépendants ? Comment expliquez-vous le résultat ?

Exercice 2.6
On jette deux dés équilibrés. Montrer que les événements suivants sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants dans leur ensemble.
A ="le chiffre obtenu pour le premier dé est pair" ;
B ="le chiffre obtenu pour le second dé est pair" ;
C ="la somme des deux dés est impaire".

3 Variables aléatoires discrètes

Exercice 3.1
On lance une fois un dé non-pipé.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points du dé. Quelle est la loi de X ? Quelle est la valeur moyenne de X ?
2. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, 5 euros si on obtient 5 ou 6 et rien si on obtient 2, 3 ou 4. Soit Y la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de Y ? Que vaut le gain moyen ?
3. On suppose maintenant qu'on reçoit 25 euros pour 1 et rien sinon. Préférez-vous jouer au jeu précédent ou à celui-ci ? Pourquoi ?

Exercice 3.2
On lance trois fois de suite un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de valeurs distinctes obtenues.

1. calculer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X ;

2. calculer la fonction de répartition de X ;
3. calculer son espérance et variance.

Exercice 3.3
Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X=-2)=a,\ \mathbb{P}(X=-1)=\frac{3}{15},\ \mathbb{P}(X=0)=b,\ \mathbb{P}(X=1)=c,\ \mathbb{P}(X=2)=\frac{4}{15}.$$

De plus, on sait que $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{V}(X)=\frac{38}{15}$.

1. Déterminer a, b et c.
2. Calculer $\mathbb{E}(3X+1)$, $\mathbb{E}\left((3X+1)^2\right)$ et, de deux manières différentes, $\mathbb{V}(3X+1)$.

Exercice 3.4
Le nombre de livres achetés par un client sur Amazon est une variable aléatoire notée X. On connaît :

$$\mathbb{P}(0\leq X\leq 1)=0,6,\ \mathbb{P}(1\leq X\leq 2)=0,5,\ \mathbb{P}(0\leq X<3)=0,8,\ \mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(X\geq 4) \text{ et } \mathbb{P}(X=4)=\mathbb{P}(X\geq 5).$$

Calculer $\mathbb{P}(X=i)$ pour $i\in\{0,1,2,3,4\}$.

Exercice 3.5
Soit F la fonction définie par

$$F(t)=\begin{cases} a & si \quad t<0 \\ b & si \quad 0\leq t<1 \\ 2b+c & si \quad 1\leq t<2 \\ d & si \quad t\geq 2 \end{cases}$$

A quelles conditions sur a, b, c et d, F est-elle une fonction de répartition ?
On suppose que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

1. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X\leq 3);\mathbb{P}(X>1);\mathbb{P}(0,5<X\leq 1)$$

2. En considérant $\mathbb{P}(X>1)=0,3$ et $\mathbb{P}(0,5<X\leq 1)=0,6$, calculer a, b, c et d.
3. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 3.6
Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité 0,15. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches laitières, on fait une analyse de lait ; on peut procéder de deux manières différentes :

- Première méthode : on effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache ;
- Deuxième méthode : on effectue une analyse sur un échantillon de mélange des laits des n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache.

Soit X_n la variable aléatoire mesurant le nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, puis l'espérance mathématique de cette variable en fonction de n.
2. On voudrait connaître la méthode la plus économique en fonction du nombre d'animaux.
   (a) Etudier la fonction f définie par $f(x) = ax + ln(x)$ où $a < 0$. Montrer que lorsque $a = ln(0,85)$, cette fonction admet un maximum positif ;
   (b) Trouver, dans ce cas, la plus grande valeur entière de x telle que $f(x) > 0$;
   (c) Démontrer que $f(n) > 0$ équivaut à $\mathbb{E}(Y_n) < 1$. En déduire, suivant les valeurs de n, la méthode que l'on a intérêt à adopter.

4 Lois de probabilité usuelles discrètes

Exercice 4.1
On lance dix fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" au moins neuf fois ?

Exercice 4.2
Un homme prétend avoir des capacités de perception extrasensorielle. Le test qu'on lui fait passer consiste à deviner les 10 résultats des jets d'un dé équilibré. Il donne 7 bonnes réponses. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un résultat aussi bon ou meilleur s'il n'a aucune capacité de perception extrasensorielle ? Combien de réponses correctes obtient un individu ordinaire ?

Exercice 4.3
En supposant l'équiprobabilité des sexes à la naissance, quel nombre minimum d'enfants un couple de parents doit-il prévoir pour s'assurer 90% de chances d'avoir au moins un garçon et une fille ?

Exercice 4.4
A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 4.5
Un enquêteur par téléphone compose des numéros jusqu'à ce que la personne appelée accepte de répondre à ses questions. On sait que, lorsqu'il appelle une femme, celle-ci accepte de répondre dans 2 cas sur 3. Lorsqu'il s'agit d'un homme, celui-ci refuse de lui répondre dans 3 cas sur 4. On sait de plus que sur 5 personnes appelées, 4 sont des hommes.

1. Calculer la probabilité qu'une personne appelée au hasard accepte de lui répondre.
2. Calculer la probabilité que l'enquêteur doive appeler plus de dix personnes avant d'obtenir une réponse favorable. On traitera ce problème à l'aide d'une variable X dont on

précisera la loi.

3. Combien de personnes en moyenne doit appeler l'enquêteur pour obtenir une réponse favorable ?

Exercice 4.6
Un magasin reçoit 3 réclamations en moyenne par jour. Supposant poissonnienne la loi de survenance de ces réclamations, calculer la probabilité pour que le premier lundi du mois prochain soient enregistrées :

1. 0 réclamation
2. 2 réclamations
3. plus de 4 réclamations

Exercice 4.7
En se basant sur les statistiques des 20 dernières années, on a pu observer que, en moyenne, 3 personnes mourraient tous les ans d'une certaine maladie rare M. Quelle est la probabilité que le nombre de personnes qui décèdent cette année de cette maladie soit au moins égal à la moyenne observée ?

5 Variables aléatoires absolument continues

Exercice 5.1
Soit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{3} & si & x \in [0;3] \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$$

Vérifier que f est bien la densité d'une variable aléatoire, calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance.

Exercice 5.2
Soit $a \in \mathbb{R}$. Les applications suivantes peuvent-elles être considérées comme des densités de probabilité d'une variable aléatoire X ? Si oui, donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a et calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance associées. Sinon, justifier.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} a & si & x > 0 \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x & si & x \in [-a;a] \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} a\exp(-x) & si & x > 0 \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$$

Exercice 5.3
Soit la fonction

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{3x}{4} & si \quad 0 < x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{4} + x & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

La fonction F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire X absolument continue ? Si oui, calculer sa densité, son espérance et sa variance.

Exercice 5.4
Soit a et b deux réels et F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ ax + bx\,[\ln(x) - 1] & si \quad 0 < x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. A quelles conditions sur a et b, F peut-elle être considérée comme la fonction de répartition d'une variable continue ?
2. On suppose les conditions précédentes satisfaites. Calculer la densité de probabilité de X et $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer a et b si $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.5
La densité de X, variable aléatoire représentant la durée de vie en années d'un certain composant éléctrique, est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} c\ x \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) & si \quad x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de répartition de X en fonction de c. En déduire c.
2. Quelle est la durée de vie moyenne de ce composant ? Quelle est la probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à cette moyenne ?

Exercice 5.6
Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Son volume de ventes hebdomadaires, en milliers de litres, est une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} 5\,(1-x)^4 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Quelle est la capacité que doit avoir le réservoir pour que la probabilité d'épuiser l'approvisionnement d'une semaine soit inférieure ou égale à 0,05 ?

6 Lois de probabilité usuelles continues

Exercice 6.1
L'annonce d'un concours radio peut passer à tout moment entre 7h et 10h. Quelle est la probabilité de l'entendre si le réveil à été mis à 8h ?

Exercice 6.2
En moyenne, un moteur d'avion peut fonctionner 2 000 heures sans panne. En supposant que la durée de fonctionnement suit une loi exponentielle, calculer la probabilité que le moteur ne puisse pas compléter un vol de 10 heures.

Exercice 6.3
Des études statistiques ont montré qu'en moyenne les jeunes changent de téléphone portable tous les 18 mois. Quelle est la probabilité pour qu'un jeune ait le même portable après deux ans ?

Exercice 6.4
Supposons que la durée de vie des tubes de télévision est distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 8 ans. Un marchand vend 10 appareils munis d'une garantie d'un an. Quelle est la probabilité que 3 appareils ou plus doivent être remplacés à cause d'un tube brûlé ?

Exercice 6.5
En se basant sur les résultats des années antérieures, on a pu établir que, lors de l'examen de statistique, 33% des étudiants obtiennent une note inférieure à 8 et que, pour 54.7% des étudiants, la note obtenue est comprise entre 8 et 12.
On choisit au hasard un étudiant de la promotion 2008 et on appelle X sa note de l'examen de statistique. On suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

1. Quelle est la note moyenne obtenue par cet étudiant ? Les notes sont-elles homogènes ?
2. Quel pourcentage d'admis peut-on espérer ?

Exercice 6.6
On a étudié la glycémie d'une population d'individus présentant certaines caractéristiques précises ; on a obtenu les résultats suivants : 20% des glycémies sont inférieures à 0.82 g/l et 30% des glycémies sont supérieures à 0.98 g/l. Si on suppose que la glycémie des individus présentant ces caractéristiques suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart-type de cette loi.

Exercice 6.7
On admet que la longueur du pied d'un homme adulte suit une loi normale de moyenne 24cm et d'écart-type 3cm. Un fabriquant de chaussettes étudie cette loi pour programmer sa production de chaussettes en taille et en quantité. Il décide de répartir sa production selon 5 tailles numérotées de 1 à 5 de la façon suivante : il prend un intervalle symétrique autour de

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

FIGURE 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

la moyenne, de probabilité 0.90 ; il divise cet intervalle en 3 intervalles égaux correspondant aux tailles 2, 3 et 4. Il obtient donc ainsi son total de 5 tailles.

1. Déterminer les longueurs de pied qui délimitent ces 5 intervalles.
2. Quelle est la part, en pourcentage, de la production totale à affecter respectivement à chacune des 5 tailles ?

7 Variable fonction d'une variable aléatoire

Exercice 7.1
Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de pannes que doit gérer un service après vente dans une semaine. La loi de probabilité de X est donnée par :

x	0	1	2	3	4
$P_X(x)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

On appelle Y la variable aléatoire correspondant au coût du service de dépannage. Ce coût est composé d'un coût fixe de 500 euros et d'un coût de 200 euros par panne.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y de deux manières (à partir des moments de la loi de X et à partir de la loi de Y).

Exercice 7.2
Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2
$P_X(x)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

Soit $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Calculer l'espérance de Y à partir des moments de la loi de X.

Exercice 3
Soit X une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'une ampoule. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ampoule fonctionne plus longtemps que la durée moyenne de vie d'une ampoule de ce type, et 0 sinon.

Donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 7.3
Soit X une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'une ampoule. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ampoule fonctionne plus longtemps que la durée moyenne de vie d'une ampoule de ce type, et 0 sinon.

Donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 7.4
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Sa densité est notée $f_X(x)$ et sa fonction de répartition est notée $F_X(x)$.

1. Soit la variable aléatoire U définie par :

$$U = \frac{X - m}{\sigma}$$

   (a) Quelle est la densité de la variable U ?

   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable $aU + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, selon que $a > 0$ ou que $a < 0$, en fonction de la fonction de répartition de la variable U.

   (c) En déduire la loi de la variable $aU + b$.

2. Soit la variable aléatoire positive Y telle que :

$$X = \ln Y$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable Y, notée $F_Y(y)$, en fonction de $F_X(x)$.

   (b) En déduire la densité de Y.
   On dit que Y suit une loi log-normale.

3. Soit la variable aléatoire suivante :

$$Z = \left(\frac{X - m}{\sigma}\right)^2$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable Z, notée $F_Z(z)$, en fonction de $F_X(x)$.

   (b) En déduire la densité de Z.
   On dit que Z suit une loi du khi-deux, notée χ^2 à 1 degré de liberté. Son espérance est alors égale à $E(Z) = 1$ et sa variance est $V(Z) = 2$.

   (c) En déduire que $E(X - m)^4 = 3\sigma^4$.

8 Couples de variables aléatoires

Exercice 8.1
Soit (X, Y) un couple aléatoire tel que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ de loi $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ donnée par

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = -1$	0,1	0,05	0,15
$x = 0$	0,15	0,2	0,1
$x = 1$	0,05	0,1	0,1

1. Donner les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = 0$.

3. Calculer $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $Cov(X,Y)$.

Exercice 8.2
Une urne contient trois boules numérotées $1,2,3$. On tire successivement et sans remise deux boules et on associe à cette expérience le couple (X,Y), où X est le numéro de la première boule tirée et Y est le numéro de la deuxième boule.

1. Donner la loi du couple et les lois marginales de X et Y. Calculer les espérances de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $Cov(X,Y)$.

Exercice 8.3
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, dont la loi jointe est donnée par

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = a^i b^j$$

où $a>0$ et $b>0$.

1. Quelles conditions doivent remplir a et b ?
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 8.4
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\} \times \mathbb{N}^\star$, dont la loi jointe est donnée par

$$\mathbb{P}(X=0, Y=k) = \frac{2^k-1}{4^k}\ ,\ \mathbb{P}(X=1, Y=k) = \frac{1}{4^k}\ ,\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}^\star$$

où $a>0$ et $b>0$.

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 8.5
On fait l'hypothèse que le nombre d'enfants d'une famille, tirée au hasard dans une population donnée, est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson de moyenne 2,2. On admet que, conditionnellement au fait que la famille a n enfants, le nombre de garçons suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.Quelle est la probabilité pour qu'une famille ainsi choisie ait trois garçons et une fille ?

9 Estimateur, intervalle de confiance

Exercice 9.1
Une assurance a 10 000 automobilistes assurés. L'espérance annuelle d'indemnités demandées par un assuré est de 240 euros avec un écart type de 800. Approximer la probabilité que les indemnités annuelles dépassent 2,7 millions d'euros.

Exercice 9.2
Le nombre d'inscriptions à un cours de psychologie est une variable aléatoire de Poisson d'espérance 100. Le professeur donnant ce cours a décidé que, si le nombre d'inscriptions est supérieur à 120, il créera deux sections et donnera donc deux cours, sinon une seule classe sera formée. Quelle est la probabilité que ce professeur ait à donner deux fois le cours ?

Exercice 9.3
Sur 100 personnes interrogées, 54% déclarent qu'elles voteront pour le candidat du parti socialiste aux prochaines élections présidentielles. Donner un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour la proportion p d'intentions de vote pour ce candidat, dans la population.

Même question si ce sondage a été effectué auprès d'un échantillon de 1000 personnes. A quelle précision le résultat est-il connu ?

Combien aurait-il fallu interroger d'électeurs pour que le résultat soit connu à 2% près ?

Exercice 9.4
On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion p est défectueuse. On contrôle un lot de 200 pièces et on trouve 20 pièces défectueuses. Donner des intervalles de confiance pour l'estimation de p, au niveau 95% et puis 99%.

Exercice 9.5
Le total des ventes quotidiennes d'un produit alimentaire dans un magasin est une variable aléatoire X que l'on suppose être de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où m et σ^2 sont inconnus. On observe les ventes de ce produit sur 500 jours et l'on obient :

$$\sum_{i=1}^{500} x_i = 50,2 \qquad \sum_{i=1}^{500} (x_i - \bar{x})^2 = 48,12$$

en milliers d'euros.

Construire un intervalle de confiance pour m de niveau 0,95.

Exercice 9.6
Un fabricant d'ampoules électriques annonce une durée de vie moyenne de ses ampoules de 170 heures. Afin de vérifier cette affirmation, un organisme de défense des consommateurs prélève au hasard 100 ampoules dans un lot de fabrication et, à l'issue de l'expérimentation, constate une moyenne de durée de vie de 158 heures, avec un écart-type empirique de 30 heures. Si on admet que cette durée de vie suit une loi normale, peut-on déduire de cette enquête que l'affirmation du fabricant est mensongère ?