

Traitement neuronal de données fonctionnelles : approche directe et approche par représentation régulière

Brieuc Conan-Guez & Fabrice Rossi

Résumé

Dans cet article, nous présentons et comparons au niveau théorique et pratique deux approches possibles pour le traitement de données fonctionnelles par Perceptron Multi-Couches (PMC).

Une donnée fonctionnelle est un ensemble fini de couples (x_i, y_i) pour lequel on suppose qu'il existe une représentation par une fonction régulière sous la forme $y_i \simeq f(x_i)$. Le nombre de points d'évaluation (les x_i) ainsi que la position de ces points dépend de la donnée.

La méthode directe consiste à modifier le modèle classique des PMC afin de travailler sur des fonctions régulières à la place des vecteurs de \mathbb{R}^n . Un neurone classique associe à un vecteur x le réel $T(ax + b)$, où a est un vecteur et b un réel. Un neurone fonctionnel travaille de la même façon, la forme linéaire $x \mapsto ax$ étant remplacée par une forme linéaire continue définie sur $L^p(\mu)$, l'espace dans lequel les fonctions représentant les données sont choisies (μ est la mesure d'observation qui décrit la façon dont sont choisis les x_i). Du point de vue pratique, on utilise l'identification de $(L^p(\mu))^*$ à $L^q(\mu)$ et on approche par un modèle paramétrique (par exemple un PMC classique) les éléments de $L^q(\mu)$.

La méthode par représentation régulière consiste à projeter chaque donnée fonctionnelle sur l'espace vectoriel engendré par les premières fonctions d'une base fonctionnelle (par exemple une base de B-Splines), le nombre de fonctions étant le même pour toutes les données. On traite ensuite les coefficients des représentations à la place des fonctions, tout en conservant l'aspect fonctionnel du modèle. On travaille ainsi avec des neurones fonctionnels dans lesquels la forme linéaire est représentée sur la même base que les données, ce qui permet un calcul direct utilisant exclusivement les coefficients des représentations.

Nous présentons les résultats théoriques fondamentaux applicables aux deux approches (approximation universelle et consistance de l'estimation des paramètres optimaux d'un PMC à partir d'un nombre fini de données). Nous illustrons et comparons les deux approches sur quelques exemples.