L2/L3 MASS/MIAGE **Année universitaire 2012–2013**

Université Paris 1

Contrôle continu : logique propositionnelle

Sujet 1

Rappels

Formules

Les formules de la logique propositionnelle sont construites à partir :

- d'un ensemble fini de variables propositionnelles, V (en général des lettres minuscules, par exemple $V = \{a, b, c\}$) ;
- d'un opérateur unaire de négation $\neg$;
- quatre opérateurs binaires :
  1. ou : $\vee$;
  2. et : $\wedge$;
  3. implique : $\Rightarrow$;
  4. équivalent : $\Leftrightarrow$.

On note $\mathcal{F}(V)$ l'ensemble des formules construites sur les variables propositionnelles V.

Notations

- on utilise souvent deux constantes : $\top$ dont la valuation est toujours 1 et $\bot$ dont la valuation est toujours 0 ;
- on note $F \equiv G$ si et seulement si pour toute valuation v, $v(F) = v(G)$ (les formules F et G sont sémantiquement équivalentes).

Équivalences notables

Si cela est indiqué dans l'énoncé, on peut utiliser les équivalences notables suivantes pour simplifier ou transformer des formules :

$$
\begin{array}{rlrl}
(X \Rightarrow Y) & \equiv ((\neg X) \vee Y) & (X \Leftrightarrow Y) & \equiv ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \\
((X \wedge Y) \wedge Z) & \equiv (X \wedge (Y \wedge Z)) & ((X \vee Y) \vee Z) & \equiv (X \vee (Y \vee Z)) \\
(X \wedge Y) & \equiv (Y \wedge X) & (X \vee Y) & \equiv (Y \vee X) \\
(X \wedge (Y \vee Z)) & \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)) & (X \vee (Y \wedge Z)) & \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)) \\
(\neg(\neg X)) & \equiv X & & \\
(\neg(X \wedge Y)) & \equiv ((\neg X) \vee (\neg Y) & (\neg(X \vee Y)) & \equiv ((\neg X) \wedge (\neg Y)
\end{array}
$$

Règles de Quine

Dans l'algorithme de Quine, on utilise les équivalences notables suivantes :

$$
\begin{array}{rcl}
(\neg\bot) \equiv \top & \qquad & (\neg\top) \equiv \bot \\
(\top \Rightarrow X) \equiv X & & (X \Rightarrow \top) \equiv \top \\
(\bot \Rightarrow X) \equiv \top & & (X \Rightarrow \bot) \equiv (\neg X) \\
(X \vee \top) \equiv \top & & (X \vee \bot) \equiv X \\
(\top \vee X) \equiv \top & & (\bot \vee X) \equiv X \\
(X \wedge \top) \equiv X & & (X \wedge \bot) \equiv \bot \\
(\top \wedge X) \equiv X & & (\bot \wedge X) \equiv \bot \\
(X \Leftrightarrow \top) \equiv X & & (X \Leftrightarrow \bot) \equiv (\neg X) \\
(\top \Leftrightarrow X) \equiv X & & (\bot \Leftrightarrow X) \equiv (\neg X)
\end{array}
$$

Calcul des séquents

Le calcul des séquents repose (exclusivement) sur huit règles (sauf mention contraire, on n'utilise pas les équivalences notables) :

$$
\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \vdash \Theta}\wedge_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A, \Delta \qquad \Theta \vdash \Gamma, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (A \wedge B), \Delta}\wedge_d
$$

$$
\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Theta \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \vdash \Theta}\vee_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (A \vee B), \Delta}\vee_d
$$

$$
\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta}\Rightarrow_g \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, (A \Rightarrow B), \Theta}\Rightarrow_d
$$

$$
\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta}{\Gamma, (\neg A), \Delta \vdash \Theta}\neg_g \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, (\neg A), \Theta}\neg_d
$$

On admet comme axiomes les séquents de la forme suivante :

$$\Gamma, A \vdash \Theta, A$$

où A désigne une formule (contrairement à ce qui a été vu en cours, on ne limite pas ici A à être une variable propositionnelle).

Exercice 1

Expliquer très brièvement pourquoi les textes suivants ne sont pas des formules de l'ensemble de formules choisi.

Question 1 $(\neg \wedge a)$ pour $\mathcal{F}(\{a, b, c\})$;

Question 2 $a \wedge b \wedge c$ pour $\mathcal{F}(\{a, b, c\})$;

Question 3 $a \Rightarrow b \wedge c$ pour $\mathcal{F}(\{a, b, c\})$;

Question 4 $(a \wedge (b \wedge c))$ pour $\mathcal{F}(\{a, b\})$;

Question 5 $((a = b) \Leftrightarrow (b = a))$ pour $\mathcal{F}(\{a, b\})$.

Exercice 2

On considère les formules suivantes :

$$F \equiv ((a \vee b) \wedge (\neg(b \vee c))) \qquad\qquad G \equiv ((a \Rightarrow b) \Rightarrow ((\neg a) \Rightarrow (\neg b))).$$

Pour chaque formule :

Question 1 Dessiner l'arbre de la formule.

Question 2 Donner toutes les valuations possible de la formule en utilisant la technique de la table de vérité.

Question 3 Donner la nature de la formule (statisfiable, tautologique ou inconsistante), en justifiant brièvement votre réponse.

Exercice 3

On considère la formule suivante :

$$F \equiv (((a \Rightarrow b) \wedge c) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow b))).$$

Question 1 Mettre F sous une forme normale (celle de votre choix) en utilisant la technique de la table de vérité.

Question 2 Mettre F sous forme normale disjonctive en utilisant les équivalences notables. On rappelle qu'une conjonction élémentaire (de même qu'une disjonction élémentaire) peut être réduite à une unique variable propositionnelle. Par exemple $a \in \mathcal{F}(\{a\})$ est une conjonction élémentaire.

Exercice 4

En utilisant l'algorithme de Quine sans les équivalences notables, montrer que la formule suivante est une tautologie :

$$F \equiv ((\neg a) \Rightarrow ((b \Rightarrow a) \Rightarrow (\neg b))).$$

Exercice 5

On considère la formule suivante :

$$F \equiv ((((\neg a) \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow (\neg a)) \wedge (a \Rightarrow (\neg d)) \wedge d) \Rightarrow c).$$

En utilisant l'algorithme de Quine (les équivalences notables peuvent être utilisées), montrer que cette formule est seulement satisfiable. Donner un exemple de valuation des variables donnant à F la valuation 1 et un autre exemple de valuation donnant à F la valuation 0. Ces valuations devront être obtenues grâce à l'algorithme de Quine.

Exercice 6

En utilisant le calcul des séquents sans les équivalences notables, montrer que la formule suivante est une tautologie :

$$((a \Rightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)))$$

Exercice 7

On considère le séquent suivant :

$$((\neg a) \Rightarrow b), (a \Rightarrow (\neg c)), (a \Rightarrow (\neg d)), d \vdash c$$

En utilisant le calcul des séquents sans les équivalences notables, montrer que ce séquent est une conséquence d'un séquent simple (c'est-à-dire ne comportant que des formules réduites à une variable propositionnelle ou à la négation d'une variable propositionnelle) qui n'est pas un axiome : la formule associée à un tel séquent est alors simplement satisfiable.

Dans cet exercice, il n'est pas nécessaire de donner l'arbre complet associé au séquent : on se contentera d'une branche conduisant au séquent simple non axiome.