L2/L3 MASS/MIAGE **Année universitaire 2014–2015**
Université Paris 1

Contrôle continu : calcul propositionnel
Sujet 1

Pour faciliter la lecture des formules, cet énoncé utilise les symboles [ ] et { } à la place des parenthèses. Par exemple, on considère la formule $[a \wedge (\neg b)]$ comme équivalente syntaxiquement à $(a \wedge (\neg b))$.

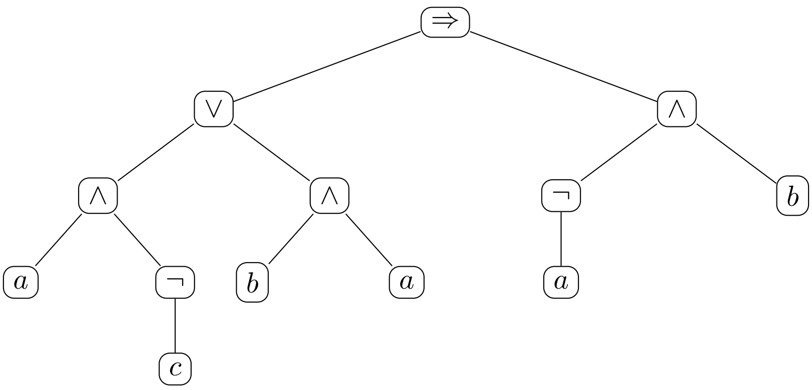
Exercice 1

On considère la formule suivante

$$F \equiv \big(\{[a \wedge (\neg c)] \vee (b \wedge a)\} \Rightarrow [(\neg a) \wedge b]\big)$$

Question 1 Dessiner l'arbre de la formule.

Correction



Question 2 Donner toutes les valuations possible de la formule en utilisant la technique de la table de vérité.

Correction

On pose $G = \{[a \wedge (\neg c)] \vee (b \wedge a)\}$ et on a

a	b	c	$\neg a$	$\neg c$	$(a \wedge (\neg c))$	$(b \wedge a)$	G	$[(\neg a) \wedge b]$	F
F	F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	V	V	F	F	F	V	V	F	F

Question 3 Donner la nature de la formule (statisfiable, tautologique ou inconsistante), en justifiant brièvement votre réponse.

Correction

La formule est seulement satisfiable puisque certains valuations la rendent vraie (par exemple la première ligne de la table ci-dessus) et d'autres la rendent fausse (par exemple la dernière ligne).

Question 4 Mettre la formule sous les deux formes normales possibles en utilisant la table de vérité calculée précédemment.

Correction

Pour mettre F sous forme normale *disjonctive*, on construit les conjonctions élémentaires correspondant aux lignes de la table pour lesquelles F vaut vrai. On obtient alors

$$F \equiv (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$$

Pour mettre F sous forme normale *disjonctive*, on procède de la même façon à partir des valuations donnant à F la valeur faux, et on obtient

$$F \equiv (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Question 5 Mettre la formule sous une des deux formes normales (au choix) en utilisant les équivalences notables (il arrive souvent d'obtenir une forme différente de celle qu'on obtient au moyen de la table de vérité).

Correction

On procède par une série d'équivalences, en utilisant une équivalence notable à chaque étape (l'équivalence est rappelée à droite) :

$$\begin{aligned}
F &= \big(\{[a \wedge (\neg c)] \vee (b \wedge a)\} \Rightarrow [(\neg a) \wedge b]\big), \\
&\equiv \big(\neg\{[a \wedge (\neg c)] \vee (b \wedge a)\}\big) \vee [(\neg a) \wedge b], && (u \Rightarrow v) \equiv ((\neg u) \vee v) \\
&\equiv \big(\{\neg[a \wedge (\neg c)]\} \wedge [\neg(b \wedge a)]\big) \vee [(\neg a) \wedge b], && \neg(u \vee v) \equiv ((\neg u) \wedge (\neg v)) \\
&\equiv \big(\{(\neg a) \vee [\neg(\neg c)]\} \wedge [(\neg b) \vee (\neg a)]\big) \vee [(\neg a) \wedge b], && \neg(u \wedge v) \equiv ((\neg u) \vee (\neg v)) \\
&\equiv \{[(\neg a) \vee c] \wedge [(\neg b) \vee (\neg a)]\} \vee [(\neg a) \wedge b], && (\neg(\neg u)) \equiv u \\
&\equiv \big(\{[(\neg a) \vee c] \wedge (\neg b)\} \vee \{[(\neg a) \vee c] \wedge (\neg a)]\}\big) \vee [(\neg a) \wedge b], && (u \wedge (v \vee w)) \equiv ((u \wedge v) \vee (u \wedge w)),
\end{aligned}$$

et donc

$$F \equiv [(\neg a) \wedge (\neg b)] \vee [c \wedge (\neg b)] \vee (\neg a) \vee [c \wedge (\neg a))] \vee [(\neg a) \wedge b],$$

une formule qui est bien sous forme normale (ici disjonctive). Notons que nous avons simplifié ici $[(\neg a) \vee (\neg a)]$, ce qui ne peut pas être fait avec les équivalences notables vues en cours. On remarque qu'on pourrait aussi obtenir finalement

$$F \equiv (\neg a) \vee [c \wedge (\neg b)],$$

mais cela n'est pas non plus possible en utilisant seulement les équivalences notables vues en cours.

Exercice 2

Étudier la nature de la formule suivante en appliquant l'algorithme de Quine **sans** les équivalences notables :

$$\big(\{[(\neg d) \land (a \Rightarrow b)] \lor [(a \Rightarrow c) \land d]\} \Rightarrow (a \Rightarrow \{(c \land d) \lor [b \land (\neg d)]\})\big)$$

Attention, pour la simplification des formules il faut **impérativement** se limiter aux règles de Quine faisant apparaître $\top$ et $\bot$, même pour des cas triviaux. Par exemple, on ne peut pas simplifier directement $(a \lor (\neg a))$ en $\top$.

Correction

On note F la formule à étudier. On commence par substituer a. On a alors, en enchaînant les équivalences de Quine :

$$\begin{aligned} F_1 = F[a \leftarrow \top] &= \big(\{[(\neg d) \land (\top \Rightarrow b)] \lor [(\top \Rightarrow c) \land d]\} \Rightarrow (\top \Rightarrow \{(c \land d) \lor [b \land (\neg d)]\})\big), \\ &\equiv \big(\{[(\neg d) \land b] \lor [c \land d]\} \Rightarrow \{(c \land d) \lor [b \land (\neg d)]\}\big), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_2 = F[a \leftarrow \bot] &= \big(\{[(\neg d) \land (\bot \Rightarrow b)] \lor [(\bot \Rightarrow c) \land d]\} \Rightarrow (\bot \Rightarrow \{(c \land d) \lor [b \land (\neg d)]\})\big), \\ &\equiv \big(\{[(\neg d) \land \top] \lor [\top \land d]\} \Rightarrow \top\big), \\ &\equiv \top. \end{aligned}$$

De ce fait, il reste seulement à étudier F_1. On substitue d. On a

$$\begin{aligned} G_1 = F_1[d \leftarrow \top] &= \big(\{[(\neg \top) \land b] \lor [c \land \top]\} \Rightarrow \{(c \land \top) \lor [b \land (\neg \top)]\}\big), \\ &\equiv \big(\{[\bot \land b] \lor c\} \Rightarrow \{c \lor [b \land \bot]\}\big), \\ &\equiv [(\bot \lor c) \Rightarrow (c \lor \bot)], \\ &\equiv c \Rightarrow c, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_2 = F_1[d \leftarrow \bot] &= \big(\{[(\neg \bot) \land b] \lor [c \land \bot]\} \Rightarrow \{(c \land \bot) \lor [b \land (\neg \bot)]\}\big), \\ &\equiv \big(\{[\top \land b] \lor \bot\} \Rightarrow \{\bot \lor [b \land \top]\}\big), \\ &\equiv b \Rightarrow b. \end{aligned}$$

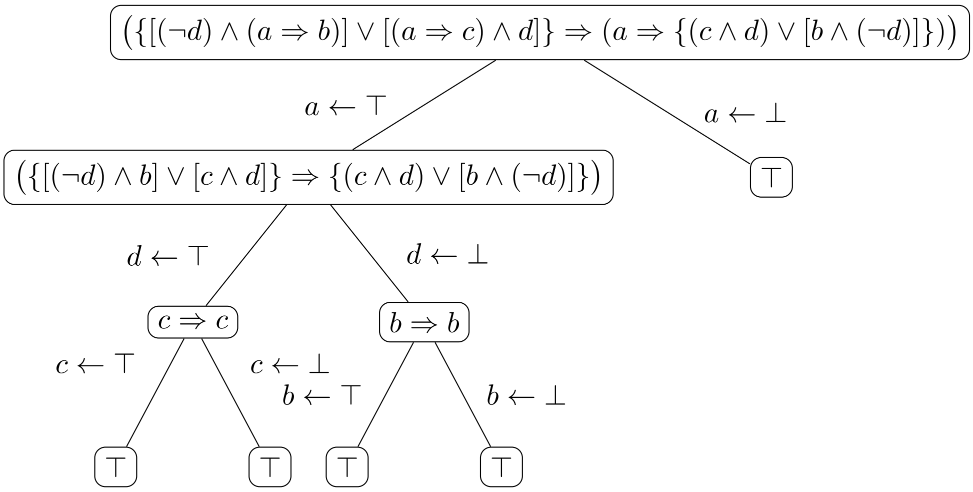
Il est ici clair que G_1 et G_2 sont des tautologies, mais il faut le démontrer par l'algorithme de Quine. On doit donc substituer c pour G_1 (et b pour G_2). Comme les deux formules sont identiques au symbole de la variable près, on procède en parallèle comme suit

$$\begin{aligned} G_1[c \leftarrow \top] &= \top \Rightarrow \top \\ &\equiv \top \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G_2[b \leftarrow \top] &= \top \Rightarrow \top, \\ &\equiv \top, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_1[c \leftarrow \bot] &= \bot \Rightarrow \bot \\ &\equiv \top \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G_2[b \leftarrow \bot] &= \bot \Rightarrow \bot, \\ &\equiv \top. \end{aligned}$$

On obtient l'arbre de Quine suivant :



Comme chaque feuille est étiquetée par un $\top$, la formule est tautologique.

Exercice 3

En utilisant le calcul des séquents **sans** les équivalences notables, étudier la nature de la formule suivante :

$$\big[\{a \Rightarrow [b \lor (\neg c)]\} \Rightarrow \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \Rightarrow (\neg a)\big)\big]$$

Comme dans l'exercice précédent, aucune simplification des formules n'est permise en dehors des transformations autorisées dans le calcul des séquents.

Correction

On étudie la validité de $\vdash F$ où F désigne la formule de l'énoncé. On applique les règles du calcul des séquents. On obtient

$$\frac{\{a \Rightarrow [b \lor (\neg c)]\} \vdash \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \Rightarrow (\neg a)\big)}{\vdash \big[\{a \Rightarrow [b \lor (\neg c)]\} \Rightarrow \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \Rightarrow (\neg a)\big)\big]} \Rightarrow_d$$

puis avec la même règle

$$\frac{\{a \Rightarrow [b \lor (\neg c)]\},\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \vdash (\neg a)}{\{a \Rightarrow [b \lor (\neg c)]\} \vdash \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \Rightarrow (\neg a)\big)} \Rightarrow_d$$

On peut ensuite appliquer la règle d'implication à gauche sur la première formule, ce qui donne

$$\frac{[b \lor (\neg c)],\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \vdash (\neg a) \qquad \{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \vdash a,(\neg a)}{\{a \Rightarrow [b \lor (\neg c)]\},\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \vdash (\neg a)} \Rightarrow_g$$

Le séquent de droite se traite par la règle de la négation qui donne

$$\frac{\dfrac{}{\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\},a \vdash a}\text{ axiome}}{\{[b \Rightarrow (\neg a)] \land c\} \vdash a,(\neg a)} \neg_d$$

Pour le séquent de gauche, on peut appliquer la règle du et gauche et celle du ou gauche, ce qui donne l'arbre de preuve suivant

$$\dfrac{\dfrac{b,[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a) \qquad (\neg c),[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a)}{[b \vee (\neg c)],[b \Rightarrow (\neg a)],c \vdash (\neg a)}\,\vee_g}{[b \vee (\neg c)],\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \vdash (\neg a)}\,\wedge_g$$

On traite de nouveau le séquent de gauche en appliquant le implique à gauche qui donne directement deux axiomes et l'arbre de preuve suivant

$$\dfrac{\dfrac{}{b,c \vdash (\neg a),b}\,\text{axiome} \qquad \dfrac{}{b,(\neg a), c \vdash (\neg a)}\,\text{axiome}}{b,[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a)}\,\Rightarrow_g$$

Enfin, le séquent de droite se traite facilement avec la négation à gauche, ce qui donne

$$\dfrac{\dfrac{}{[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a),c}\,\text{axiome}}{(\neg c),[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a)}\,\neg_g$$

L'arbre de preuve complet est donc

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b,c \vdash (\neg a),b} \quad \dfrac{}{b,(\neg a), c \vdash (\neg a)}}{b,[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a)}\,\Rightarrow_g \qquad \dfrac{\dfrac{}{[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a),c}}{(\neg c),[b \Rightarrow (\neg a)], c \vdash (\neg a)}\,\neg_g}{[b \vee (\neg c)],[b \Rightarrow (\neg a)],c \vdash (\neg a)}\,\vee_g}{[b \vee (\neg c)],\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \vdash (\neg a)}\,\wedge_g \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\},a \vdash a}}{\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \vdash a,(\neg a)}\,\neg_d}{\{a \Rightarrow [b \vee (\neg c)]\},\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \vdash (\neg a)}\,\Rightarrow_g}{\{a \Rightarrow [b \vee (\neg c)]\} \vdash \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \Rightarrow (\neg a)\big)}\,\Rightarrow_d}{\vdash \big[\{a \Rightarrow [b \vee (\neg c)]\} \Rightarrow \big(\{[b \Rightarrow (\neg a)] \wedge c\} \Rightarrow (\neg a)\big)\big]}\,\Rightarrow_d$$