L2/L3 MASS/MIAGE **Année universitaire 2012–2013**
Université Paris 1

Contrôle continu : preuves de programmes
Sujet 1

On rappelle que la notation $\mathtt{prog}_{i\to j}$ désigne les lignes i à j (incluses) du programme `prog`. De plus valeurs contenues dans les variables sont soit des entiers de $\mathbb{Z}$, soit des valeurs de vérité (la distinction sera évidente en fonction du contexte).

Exercice 1

Soit le programme suivant :

prog

```
x ← (2 * y) - x
z ← x + y
y ← y + 1
```

Question 1 Montrer que le triplet $\langle\rangle$ `prog` $\langle z - x = y - 1\rangle$ est totalement correct.

Question 2 Montrer que le triplet $\langle x = y\rangle$ `prog` $\langle (z = 2x) \wedge (y = x + 1)\rangle$ est totalement correct.

Exercice 2

Soit le programme suivant :

prog

```
1 if (x > (y + 1))
2   y ← y + 1
3   x ← x - 1
4 else
5   y ← y - 1
6   x ← x + 1
7 end if
```

Question 1 Montrer que le triplet $\langle x > y + 1\rangle$ $\mathtt{prog}_{2\to 3}$ $\langle x \geq y\rangle$ est totalement correct **sans utiliser la règle de Floyd pour l'affectation**.

Question 2 Montrer que le triplet $\langle x \geq y - 2\rangle$ $\mathtt{prog}_{5\to 6}$ $\langle x \geq y\rangle$ est totalement correct.

Question 3 Montrer que le triplet $\langle x \geq y - 2\rangle$ `prog` $\langle x \geq y\rangle$ est totalement correct.

Exercice 3

On considère le programme suivant :

prog

```
1 k ← 0
2 t ← x
3 while (t > 1)
4   k ← k + 1
5   t ← t / 2
6 end while
```

On rappelle que `t/2` désigne le quotient de la division euclidienne de `t` par 2. L'objectif de l'exercice est de montrer qu'à la fin de la boucle, `k` contient la partie entière de $\log_2(x)$. On appelle I la formule du calcul des prédicats suivante

$$I \equiv (t \geq 1) \wedge (2^k t \leq x) \wedge (x < 2^{k+1} t)$$

Question 1 Montrer que le triplet $\langle x > 0 \rangle$ $\texttt{prog}_{1 \to 2}$ $\langle I \rangle$ est totalement correct.

Question 2 Que peut-on dire du triplet $\langle \rangle$ $\texttt{prog}_{1 \to 2}$ $\langle I \rangle$?

Question 3 Montrer que le triplet suivant est totalement correct :

$$\left\langle (t > 1) \wedge (2^k t \leq x) \wedge (x < 2^{k+1} t) \right\rangle \ \texttt{prog}_{4 \to 5} \ \left\langle (t > 0) \wedge (2^k t \leq x) \wedge (x < 2^{k+1} t) \right\rangle .$$

On utilisera la tautologie suivante (propriété de la division euclidienne) :

$$\forall y \, ((y \geq 0) \Rightarrow ((2(y/2) \leq y) \wedge (y \leq 2(y/2) + 1))) \, ,$$

dans laquelle $y/2$ désigne comme rappelé au dessus le quotient de la division euclidienne de y par 2.

Question 4 Montrer que le triplet suivant est partiellement correct :

$$\{I\} \ \texttt{prog}_{3 \to 6} \ \left\{ (2^k \leq x) \wedge (x < 2^{k+1}) \right\} ,$$

puis en déduire la correction partielle du triplet suivant :

$$\{x > 0\} \ \texttt{prog} \ \left\{ (2^k \leq x) \wedge (x < 2^{k+1}) \right\} .$$

Question 5 Proposer un variant pour la boucle et montrer la correction totale du triplet suivant grâce à ce variant :

$$\langle x > 0 \rangle \ \texttt{prog} \ \left\langle (2^k \leq x) \wedge (x < 2^{k+1}) \right\rangle .$$