L2/L3 MASS/MIAGE **Année universitaire 2011–2012**
Université Paris 1

Partiel de mathématiques pour l'informatique
Jeudi 3 mai – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Le barème est indicatif. Les documents imprimés ou manuscrits sont autorisés. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite.

Exercice 1 (*2 points*)

Montrer que le triplet suivant est vrai :

$$\langle x = a \wedge y = b \rangle \ \texttt{x} \leftarrow \texttt{2*x-y ; y} \leftarrow \texttt{y+x ; x} \leftarrow \texttt{2*(y-x)} \ \langle x = 2b \wedge y = 2a \rangle$$

On rappelle que $\leftarrow$ désigne l'affectation informatique dans un programme alors que $=$ désigne l'égalité mathématique dans un prédicat.

Exercice 2 (*5 points*)

On considère le programme suivant dont les paramètres sont le nombre réel x et l'entier p :

prog
```
1  y ← 1
2  z ← x
3  n ← p
4  while ( n > 0 ) {
5    if ( n % 2 == 1 ) {
6       y ← y * z
7    }
8    z ← z * z
9    n ← n / 2
10 }
```

On rappelle que `n` étant un entier, `n % 2` désigne le reste de la division entière de `n` par 2 alors que `n / 2` désigne le quotient de cette division. On a en particulier pour tout $k \geq 0$

$$k = 2(k/2) + k\%2$$

On cherche à montrer que le triplet suivant est vrai

$$\langle p \geq 0 \wedge x > 0 \rangle \ \texttt{prog} \ \langle \mathrm{y} = x^p \rangle$$

On note V l'expression réduite à n et I le prédicat $n \geq 0 \wedge z^n y = x^p$.

Question 1 Montrer que le triplet suivant est vrai :

$$\langle p \geq 0 \wedge x > 0 \rangle \ \texttt{prog}_{1\to 3} \ \langle I \rangle \,,$$

où $\texttt{prog}_{i\to j}$ désigne les lignes i à j (incluses) du programme `prog` (ici, les trois premières lignes).

Question 2 Montrer que le triplet suivant est vrai :

$$\langle n > 0 \land z^n y = x^p \rangle \ \texttt{prog}_{5\to 7} \ \left\langle n > 0 \land z^n y = x^p z^{n\%2} \right\rangle .$$

Question 3 Montrer que le triplet suivant est vrai :

$$\left\langle n > 0 \land z^n y = x^p z^{n\%2} \right\rangle \ \texttt{prog}_{8\to 9} \ \langle n \geq 0 \land z^n y = x^p \rangle ,$$

en utilisant notamment la propriété de la division entière rappelée plus haut.

Question 4 Déduire des questions 2 et 3 que I est un invariant de la boucle allant de la ligne 4 à la ligne 10 (incluses), en justifiant soigneusement votre réponse (vous pouvez admettre les résultats des questions précédentes si besoin).

Question 5 Montrer que le triplet suivant est vrai :

$$\langle n = t \land t > 0 \rangle \ \texttt{prog}_{5\to 9} \ \langle n < t \rangle .$$

Question 6 Déduire des questions 4 et 5 que V est un variant de la boucle associé à l'invariant I, c'est-à-dire que le triplet suivant est vrai :

$$\langle I \land n > 0 \land (V = t) \rangle \ \texttt{prog}_{5\to 9} \ \langle I \land (V < t) \rangle .$$

Question 7 Déduire des analyses précédentes que le triplet suivant est vrai :

$$\langle p \geq 0 \land x > 0 \rangle \ \texttt{prog} \ \langle \texttt{y} = x^p \rangle .$$

Justifiez soigneusement votre réponse, en admettant les résultats qui pourraient vous manquer.

Exercice 3 (*3 points*)

On note $T(p)$ le nombre exact de multiplications réalisées par le programme `prog` de l'exercice 2.

Question 1 Déterminer un majorant de $T(p)$ pour tout $p \geq 0$ (en faisant une analyse dans le cas le pire). On rappelle que pour tout entier $p \geq 0$, il existe un réel $k = \log_2 p$ tel que $p = 2^k$.

Question 2 Déterminer un minorant de $T(p)$ pour tout $p \geq 0$.

Question 3 Montrer que le minorant de $T(p)$ est atteint pour $p = 2^k$ pour tout k entier positif ou nul.

Question 4 Montrer que le majorant de $T(p)$ est atteint pour $p = 2^k - 1$ pour tout k entier strictement positif. On utilisera la relation suivante :

$$2^k - 1 = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j.$$

Exercice 4 (*3 points*)

On considère le programme récursif suivant (cf l'exercice 2 pour le sens des opérateurs de division et de modulo) :

```
bidule(n,p) {
  if(n == 0) {
    return 4
  } else {
    if( n % 2 == 0) {
      z ← bidule(n / 4, p + 1)
    } else {
      z ← bidule(n / 4, p - 1)
    }
    return truc(bidule(n / 4, 2 * p), z, n)
  }
}
```

La fonction `truc` n'est pas donnée. On suppose qu'elle réalise exactement $f(\mathtt{n})$ opérations quand elle est appelée comme suit : `truc(x,y,n)` (le nombre d'opérations ne dépend donc pas de `x` et de `y`). On note $T(\mathtt{n})$ le nombre d'opérations réalisées par l'appel à `bidule(n,p)`.

Question 1 Justifier l'absence de `p` dans l'analyse de complexité, c'est-à-dire le fait qu'on considère $T(\mathtt{n})$ et pas $T(\mathtt{n},\mathtt{p})$.

Question 2 Montrer par un raisonnement simple par récurrence que l'appel à `bidule(n,p)` se termine toujours si $\mathtt{n} \geq 0$. On ne tiendra pas compte de `p` dans l'analyse.

Question 3 Établir une relation de récurrence entre $T(\mathtt{n})$ et $T(\mathtt{n}/4)$ en précisant quel type d'arrondi est considéré dans le calcul de $\mathtt{n}/4$ (partie entière ou approximation par le dessus).

Question 4 On rappelle que $\log_4 2 = \frac{1}{2}$. En déduire un ordre de grandeur pour $T(\mathtt{n})$ dans les deux cas suivants :

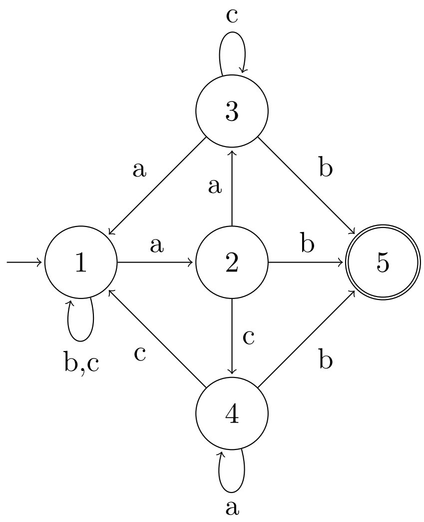
1. $f(\mathtt{n}) = \sqrt{\mathtt{n}}$
2. $f(\mathtt{n}) = \mathtt{n}^{\frac{1}{4}}$

Exercice 5 (*2 points*)

Dessiner un automate déterministe complet reconnaissant le langage $L = (a*)(bc|a)(b+)$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$.

Exercice 6 (*5 points*)

On considère l'automate suivant :



On rappelle que X_i désigne le langage reconnu par l'automate en considérant i comme l'état initial. Dans l'automate ci-dessus, X_1 est donc le véritable langage reconnu.

Question 1 L'automate est-il déterministe ? Est-il complet ?

Question 2 Donner un exemple de mot le plus court possible reconnu par l'automate.

Question 3 Donner un exemple de mot dont la reconnaissance entraîne le passage par tous les états de l'automate (au moins une fois par état).

Question 4 Déterminer les équations satisfaites par les $(X_i)_{1 \leq i \leq 5}$.

Question 5 En appliquant le lemme de Arden, exprimer X_4 et X_3 uniquement en fonction de X_1. On rappelle que le lemme de Arden indique que l'unique solution de $X = \alpha X | \beta$ est $X = \alpha^* \beta$ si $\varepsilon \notin \alpha$.

Question 6 En utilisant les résultats précédents, exprimer X_2 uniquement en fonction de X_1.

Question 7 En appliquant le lemme de Arden une nouvelle fois, déterminer le langage reconnu par l'automate.