L2/L3 MASS/MIAGE **Année universitaire 2013–2014**
Université Paris 1

Partiel de mathématiques pour l'informatique
Mercredi 7 mai – Durée 3 heures
SUJET 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Chacune des trois parties de l'énoncé (automates, logique propositionnelle et preuves de programmes) compte pour environ un tiers de la note. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Les documents ne sont pas autorisés. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite.

1 Automates

Exercice 1

On étudie le langage rationnel $L = (a*)(bc|a)(c+)$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Question 1 En utilisant l'algorithme de Thompson, déterminez un automate reconnaissant $a*$. Attention, il ne faut pas simplifier l'automate obtenu !

Question 2 En utilisant la méthode de votre choix (aucune justification n'est demandée), déterminez un automate avec un unique état terminal reconnaissant $(bc|a)$.

Question 3 En utilisant la méthode de votre choix (aucune justification n'est demandée), déterminez un automate avec un unique état terminal reconnaissant $c+$.

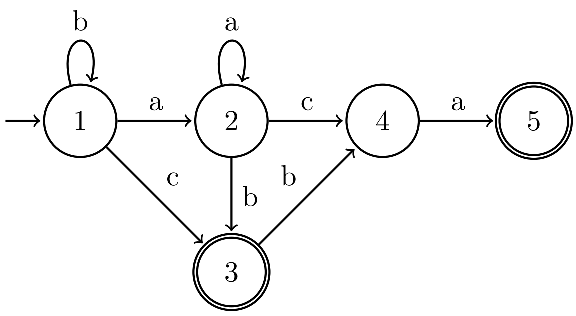
Question 4 En utilisant les résultats des questions précédentes, construisez grâce à l'algorithme de Thompson un automate reconnaissant L. Pourquoi l'algorithme est-il applicable ?

Question 5 Dans l'automate obtenu, supprimez les ε-transitions, puis les états inutiles, en appliquant l'algorithme *backward*.

Question 6 On cherche à déterminiser l'automate obtenu après la simplification précédente. Combien d'états l'automate déterministe aura-t-il au maximum ? Construisez cet automate par la méthode de votre choix.

Exercice 2

Soit l'automate suivant défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



On rappelle que X_i désigne le langage reconnu par l'automate en considérant i comme l'état initial.

Question 1 Déterminez les équations satisfaites par les X_i.

Question 2 Résolvez les équations pour obtenir le langage reconnu par l'automate.

2 Logique propositionnelle

Exercice 3

Étudier la nature de la formule suivante en appliquant l'algorithme de Quine **sans** les équivalences notables :

$$\Big(\big(a \Rightarrow (c \vee d)\big) \wedge \big(b \Rightarrow (\neg c)\big) \wedge \big((\neg(c \wedge d)) \Rightarrow a\big)\Big) \Rightarrow \Big(a \Rightarrow (\neg b)\Big)$$

Exercice 4

En utilisant le calcul des séquents **sans** les équivalences notables, étudier la nature de la formule suivante

$$\Big(\big((a \Rightarrow b) \wedge (\neg d)\big) \vee \big((a \Rightarrow c) \wedge d\big)\Big) \Rightarrow \Big(a \Rightarrow \big((b \wedge (\neg d)) \vee (c \wedge d)\big)\Big)$$

3 Preuves de programmes

Exercice 5

On étudie le programme suivant :

prog
```
1 x ← u
2 y ← 0
3 while (x>=v)
4   x ← x - v
5   y ← y + 1
6 end while
```

Dans ce programme, toutes les variables sont des entiers de $\mathbb{Z}$.

Question 1 Montrez que le triplet suivant est totalement correct

$$\langle (u \geq 0) \wedge (v > 0) \rangle \ \texttt{prog}_{1 \to 2} \ \langle (u = vy + x) \wedge (x \geq 0) \wedge (v > 0) \rangle .$$

Question 2 Montrez que la formule $I \equiv (u = vy + x) \wedge (x \geq 0) \wedge (v > 0)$ et que le terme $V \equiv x$ sont respectivement un invariant et un variant pour la boucle `while` du programme. Que se passe-t-il si on supprime la sous-formule $(v > 0)$ de I ?

Question 3 Montrez que le triplet suivant est totalement correct

$$\langle (u \geq 0) \wedge (v > 0) \rangle \ \texttt{prog} \ \langle (u = vy + x) \wedge (x \geq 0) \wedge (x < v) \rangle .$$

Exercice 6

On étudie le programme suivant :

prog
```
r ← 0
k ← 1
while(k <= n)
 r ← r + k*k
 k ← k + 1
end while
```

Dans ce programme, toutes les variables sont des entiers de $\mathbb{Z}$. L'opérateur `*` désigne la multiplication dans $\mathbb{Z}$. On utilise la convention que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 0$ si $n \leq 0$.

Question 1 Montrez que le triplet suivant est totalement correct

$$\langle n \geq 1 \rangle \ \texttt{prog} \ \left\langle r = \sum_{i=1}^{n} i^2 \right\rangle.$$

Question 2 Déterminez une précondition P la plus faible possible telle que le triplet suivant soit totalement correct

$$\langle P \rangle \ \texttt{prog} \ \left\langle r = \sum_{i=1}^{n} i^2 \right\rangle.$$

On se contentera d'une argumentation succincte à partir de la preuve de la question précédente, sans chercher à donner une nouvelle preuve formelle.