L2 sciences économiques **Année universitaire 2012 – 2013**

Université Paris 1

Examen de statistique
Vendredi 21 juin – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. **Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.** Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions, sans évaluer les fonctions usuelles comme exp ou ln. Si les notations C_n^p, A_n^p et/ou $\binom{n}{p}$ sont utilisées, leur définitions en fonction de la factorielle devront être rappelées.

Exercice 1 (*4 points*)

Un éleveur propose à ses clients trois races de poulets, les poulets jaunes, gris et noirs. Suite à une manipulation erronée, il se retrouve avec un lot d'œufs provenant des trois races. Un comptage des stocks conduit à affirmer que le lot contient 3 œufs (de poulets) noirs, 4 œufs (de poulets) jaunes et 5 œufs (de poulets) gris

Question 1 On choisit au hasard simultanément 3 œufs dans le lot. Décrire avec précision l'univers de cette expérience aléatoire et la probabilité associée.

Question 2 Dans l'expérience ci-dessus, donner la probabilité d'obtenir uniquement des œufs (de poulets) jaunes.

Question 3 Dans l'expérience ci-dessus, donner la probabilité de n'obtenir aucun œuf (de poulet) jaune.

Question 4 Dans l'expérience ci-dessus, donner la probabilité d'obtenir exactement un œuf (de poulet) noir.

Exercice 2 (*6 points*)

On étudie le nombre d'œufs pondus par semaine par une poule pondeuse. On observe dans un élevage dit « biologique » qu'une poule pond en moyenne 5 œufs par semaine. On note O la variable aléatoire indiquant le nombre d'œufs pondus en une semaine par une poule « biologique ». On suppose d'abord que O est distribuée selon une loi de Poisson.

Question 1 Déterminer le paramètre λ de la loi.

Question 2 En supposant O poisson comme dans la question 1 et en utilisant le paramètre λ déterminé à cette question, donner la probabilité $\mathbb{P}(O = 5)$.

Question 3 On observe dans les élevages qu'il est extrêmement rare qu'une poule ponde strictement plus d'un œuf par jour. Calculer la probabilité d'un évènement bien choisi permettant de dire si l'hypothèse que O est distribuée selon une loi de Poisson est compatible avec cette observation.

On constate, grâce aux calculs de la question 3, que le modèle Poisson n'est pas réaliste. On propose alors la loi discrète suivante :

o	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(O = o)$	0,1	a	0,5	b	0,1

qui dépend des deux paramètres a et b.

Question 4 On rappelle qu'une poule pond en moyenne 5 œufs par semaine. En déduire les valeurs de a et b.

Question 5 Calculer la probabilité qu'une poule ponde au plus 5 œufs par semaine, selon la loi ci-dessus.

Question 6 Calculer la variance de O (selon la loi ci-dessus).

Exercice 3 (*3 points*)

On répartit les œufs (de poule) en trois calibres (c'est-à-dire trois poids), notés M, L et XL. On considère d'autre part trois modes d'élevages, standard S, « label rouge » R et « biologique » B. On considère un ensemble d'exploitations dans lesquelles on observe 70% d'œufs standards, 20% d'œufs label rouge et le reste d'œufs biologiques. L'expérience aléatoire considérée consiste à choisir un œuf selon ces proportions. La répartition des calibres en fonction du mode d'élevage est donnée par la table suivante :

Élevage/Calibre	M	L	XL
standard S	50 %	40 %	10 %
label rouge R	30 %	50 %	20 %
biologique B	20 %	40 %	40 %

Question 1 Calculer la probabilité d'obtenir un œuf de calibre XL.

Question 2 Sachant que l'œuf obtenu est de calibre M, calculer la probabilité qu'il soit issu d'un élevage label rouge.

Question 3 Sachant que l'œuf obtenu est de calibre L, calculer la probabilité qu'il ne soit pas issu d'un élevage biologique.

Exercice 4 (*3 points*)

Avant l'abattage, le poids moyen d'un poulet dit « biologique » est supposé distribué selon une loi Normale de moyenne $\mu = 2$ kg et d'écart type $\sigma = 0{,}1$ kg.

Question 1 Calculer la probabilité d'obtenir un poulet biologique de poids supérieur ou égal à 2,2 kg.

Question 2 Calculer la probabilité que le poids d'un poulet biologique soit dans l'intervalle $[1{,}9; 2{,}1]$.

Question 3 Déterminer un poids p tel que la probabilité d'obtenir un poulet biologique de poids strictement inférieur à p soit d'environ 1%.

Exercice 5 (*5 points*)

On étudie le poids des œufs produits par une exploitation. Pour simplifier l'étude, on utilise comme unité un poids de référence et on travaille sur le poids exprimé en cette unité. Pour ce faire, on définit la fonction f suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ cx + d & \text{si } x \in \left[1; \frac{5}{4}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 1 Donner une primitive F de la fonction f.

On suppose à partir de maintenant que les valeurs numériques a, b, c et d sont telles que f est la densité d'une variable aléatoire absolument continue X qui donne le poids d'un œuf (par rapport au poids de référence). Par exemple si $X = 2$, c'est que l'œuf pèse deux fois le poids de référence.

Question 2 On suppose que $\mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir un œuf de poids inférieur ou égal au poids de référence est de 50 %). En déduire une équation que doivent satisfaire a et b, et une autre équation que doivent satisfaire c et d.

Question 3 On suppose que f est continue en $\frac{1}{2}$ et en $\frac{5}{4}$. En déduire a, b, c et d.

Question 4 Calculer la probabilité d'obtenir un œuf d'un poids inférieur ou égal au trois quart du poids de référence.

Question 5 Calculer le poids moyen d'un œuf par rapport au poids de référence (on se contentera de donner la primitive nécessaire à l'obtention de ce poids moyen sans développer les calculs jusqu'au bout).

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\ldots,n\}$	$P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\ldots,n\}$	$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\ldots,\}$	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$