L2 sciences économiques **Année universitaire 2013–2013**
Université Paris 1

Partiel de statistique
Mardi 16 avril – Durée 2 heures
Correction du sujet 1

Exercice 1 (*sur 5 points*)

Question 1 L'univers est

$$\Omega = \{(c_1, c_2, c_3) \in C^3 \mid c_1 \neq c_2, c_1 \neq c_3, c_2 \neq c_3\},$$

c'est-à-dire les triplets de cartes distinctes choisies dans le paquet C (on choisit une modélisation dans laquelle les cartes sont discernables même si elles portent le même symbole car le modèle non discernable est beaucoup plus difficile à gérer). On a $|\Omega| = A_{13}^3 = 13 \times 12 \times 11 = 1716$. Sans mention particulière à ce sujet dans l'énoncé, on considère par symétrie que la probabilité sur Ω est uniforme.

Question 2 On note $A =$ « obtenir uniquement des cartes portant un disque noir » et DN le sous-ensemble de C des cartes portant un disque noir. D'après le tableau $|DN| = 4$. Il est clair de plus que A s'écrit

$$A = \{(c_1, c_2, c_3) \in DN^3 \mid c_1 \neq c_2, c_1 \neq c_3, c_2 \neq c_3\},$$

et donc que $|A| = A_{|DN|}^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{24}{1716} = \frac{2}{143} \simeq 0{,}014.$$

Question 3 On note $B =$ « n'obtenir aucune carte portant un symbole noir ». Il est clair que B est aussi l'évènement « obtenir uniquement des cartes de l'ensemble $\overline{N}$ », où N désigne l'ensemble des cartes portant un symbole noir. Comme

$$B = \{(c_1, c_2, c_3) \in \overline{N}^3 \mid c_1 \neq c_2, c_1 \neq c_3, c_2 \neq c_3\},$$

on a $|B| = A_{|\overline{N}|}^3$. Or, d'après le tableau, on a six cartes rouges et donc $|B| = A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$. On a donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{120}{1716} = \frac{10}{143} \simeq 0{,}07.$$

Question 4 On appelle D « obtenir exactement une carte avec un carré rouge ». Pour calculer la taille de D, la solution la plus sûre consiste à écrire D sous forme d'une union disjointe d'ensembles simples. On note ainsi $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ avec D_i l'évènement « obtenir exactement une carte avec un carré rouge en position i ». Il est clair que cette union est disjointe. Par symétrie, $|D_1| = |D_2| = |D_3|$. Or D_1 s'écrit clairement

$$D_1 = CR \times \{(c_2, c_3) \in \overline{CR}^2 \mid c_2 \neq c_3\},$$

où CR désigne l'ensemble des cartes portant un carré rouge (soit 3 cartes) et $\overline{CR}$ son complémentaire (soit 10 cartes). Donc

$$\begin{aligned}
|D_1| &= |CR| \times \left|\{(c_2, c_3) \in \overline{CR}^2 \mid c_2 \neq c_3\}\right| \\
&= 3 \times A_{|\overline{CR}|}^2 \\
&= 3 \times 10 \times 9 \\
&= 270
\end{aligned}$$

Finalement $|D| = 3 \times |D_1| = 810$. et donc

$$\mathbb{P}(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{810}{1716} = \frac{135}{286} \simeq 0{,}47.$$

Exercice 2 (*sur 8 points*)

Question 1 On réalise la somme sur les lignes ou sur les colonnes, selon la variable considérée. On obtient ainsi les lois marginales, pour C

c	Noir	Rouge
$\mathbb{P}(C = c)$	0,35	0,65

et pour F

f	Carré	Disque	Triangle
$\mathbb{P}(F = f)$	0,3	0,35	0,35

Question 2 Il suffit de trouver un couple (c,f) tel que $\mathbb{P}(C = c, F = f) \neq \mathbb{P}(C = c) \times \mathbb{P}(F = f)$. Par exemple $\mathbb{P}(C = \text{Noir}) \times \mathbb{P}(F = \text{Carré}) = 0{,}35 \times 0{,}3 = 0{,}105$ alors que $\mathbb{P}(C = \text{Noir}, F = \text{Carré}) = 0{,}1$.

Question 3 On utilise la définition des probabilités conditionnelles, soit ici

$$\mathbb{P}(F = f | C = \text{Rouge}) = \frac{\mathbb{P}(F = f, C = \text{Rouge})}{\mathbb{P}(C = \text{Rouge})}.$$

On obtient ainsi

f	Carré	Disque	Triangle
$\mathbb{P}(F = f \mid C = \text{Rouge})$	$\frac{0{,}2}{0{,}65}$	$\frac{0{,}15}{0{,}65}$	$\frac{0{,}3}{0{,}65}$

ce qui se simplifie en

f	Carré	Disque	Triangle
$\mathbb{P}(F = f \mid C = \text{Rouge})$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{6}{13}$

Question 4 On constate que G prend uniquement les valeurs 1 et -1, et donc que $G(\Omega) = \{-1{,}1\}$. En outre, par définition de G,

$$\mathbb{P}(G = 1) = \mathbb{P}(\{(C = \text{Noir}, F = \text{Disque})\} \cup \{(C = \text{Noir}, F = \text{Triangle})\} \cup \{(C = \text{Rouge}, F = \text{Triangle})\}).$$

Donc $\mathbb{P}(G = 1) = 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}3 = 0{,}55$. Comme $\mathbb{P}(G = 1) + \mathbb{P}(G = -1) = 1$ (car $G(\Omega) = \{-1{,}1\}$), on a donc $\mathbb{P}(G = -1) = 0{,}45$. La loi de G est donc résumée par le tableau suivant :

g	-1	1
$\mathbb{P}(G = g)$	0,45	0,55

L'espérance de G est alors $\mathbb{E}(G) = -1 \times \mathbb{P}(G = -1) + 1 \times \mathbb{P}(G = 1) = 0{,}1$. De plus $E(G^2) = 1 \times \mathbb{P}(G = -1) + 1 \times \mathbb{P}(G = 1) = 1$, et donc $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 0{,}99$.

Question 5 D'après l'énoncé, les tirages se font toujours avec le même jeu et il est donc naturel de supposer qu'ils sont indépendants. L'obtention d'une carte gagnante suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}55$, selon l'analyse réalisée pour G. On a donc une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre, ce qui veut dire que T suit une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}55$. On a donc

$$\mathbb{P}(T = k) = 0{,}55 \times (0{,}45)^{k-1}.$$

De plus $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{0{,}55} = \frac{20}{11} \simeq 1{,}82$.

Le gain d'un joueur qui s'arrête à la première carte gagnante est donné par $Y = 2 - T$. En effet, le joueur a perdu $T - 1$ fois avant de gagner une fois. Il a donc perdu $T - 1$ euros puis gagné un euro, soit donc $1 - (T - 1) = 2 - T$ euros. Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(Y) = 2 - \mathbb{E}(T) = 2 - \frac{20}{11} = \frac{2}{11} \simeq 0{,}18$.

Question 6 On constate d'après le tableau que $U(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$. La loi de U est obtenue en déterminant les probabilités des évènements $U^{-1}(\{u\})$ pour chaque $u \in U(\Omega)$. D'après le tableau qui définit U, chaque gain correspond à une unique combinaison (couleur, forme), excepté -1 pour lequel $U^{-1}(\{-1\}) = \{(C = \text{Rouge}, F = \text{Carré})\} \cup \{(C = \text{Rouge}, F = \text{Disque})\}$. En tenant compte de cette remarque, on obtient la loi suivante pour U

u	-2	-1	0	1	3
$\mathbb{P}(U = u)$	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05

Question 7 L'espérance de U est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= (-2 \times 0{,}1) + (-1 \times 0{,}35) + 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}05 \\ &= -0{,}2.\end{aligned}$$

Question 8 On cherche donc $\mathbb{P}(U > 0|A)$ où A désigne l'évènement « la carte tirée ne comporte ni un triangle noir, ni un carré rouge ». On constate tout d'abord que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - (\mathbb{P}(\{(C = \text{Noir}, F = \text{Triangle})\}) + \mathbb{P}(\{(C = \text{Rouge}, F = \text{Carré})\})) \\ &= 1 - (0{,}05 + 0{,}2) \\ &= 0{,}75.\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\mathbb{P}(U > 0 \text{ et } A)$. Or, il n'y a que deux combinaisons (couleur, forme) qui donnent $U > 0$, et l'une d'elles n'est pas dans A. On a donc $\{U > 0 \text{ et } A\} = \{(C = \text{Noir}, F = \text{Disque})\}$. Donc

$$\mathbb{P}(U > 0 \text{ et } A) = \mathbb{P}(\{(C = \text{Noir}, F = \text{Disque})\}) = 0{,}2.$$

Donc finalement

$$\mathbb{P}(U > 0|A) = \frac{\mathbb{P}(U > 0 \text{ et } A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}75} = \frac{4}{15} \simeq 0{,}27.$$

Exercice 3 (*sur 3,5 points*)

On remarque en introduction que comme $X \sim \mathcal{N}(2, 2^2)$, $Y = \frac{X-2}{2}$ est distribuée selon la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ pour laquelle la table fournie dans l'énoncé donne la fonction de répartition.

Question 1 L'inégalité sur X, $X \geq 4{,}5$, est équivalente à l'inégalité sur Y, $Y \geq 1{,}25$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 4{,}5) &= \mathbb{P}(Y \geq 1{,}25) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y < 1{,}25) && \text{par passage au complémentaire} \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1{,}25) && \text{car } Y \text{ est continue} \\ &= 1 - F_Y(1{,}25) && \text{par définition de } F_Y \\ &= 1 - 0{,}8944 && \text{par lecture dans la table} \\ &= 0{,}1056.\end{aligned}$$

Question 2 On cherche $\mathbb{P}(X \in [1; 4{,}5]) = \mathbb{P}(X \in]1; 4{,}5])$ par continuité de X. Par définition de la fonction de répartition, on a donc $\mathbb{P}(X \in [1; 4{,}5]) = F_X(4{,}5) - F_X(1)$. Le premier terme a été calculé à la question précédente (plus précisément, nous avons obtenu $\mathbb{P}(X \geq 4{,}5) = 1 - F_X(4{,}5)$), il nous reste donc à évaluer le second. Or, $X \leq 1$ est équivalent $Y \leq -0{,}5$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(Y \leq -0{,}5) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 0{,}5) && \text{par symétrie de la loi } \mathcal{N}(0, 1) \\ &= 1 - F_Y(0{,}5) && \text{par définition de } F_Y \\ &= 1 - 0{,}6915 && \text{par lecture dans la table} \\ &= 0{,}3085.\end{aligned}$$

On obtient donc finalement $\mathbb{P}(X \in [1; 4{,}5]) = 0{,}8944 - 0{,}3085 = 0{,}5859$.

Question 3 On commence par déterminer le réel u tel que $\mathbb{P}(Y \geq u) = 0{,}33$, toujours avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Par continuité de Y, $\mathbb{P}(Y \geq u) = 0{,}33$ est équivalent à $1 - \mathbb{P}(Y \leq u) = 0{,}33$, soit $\mathbb{P}(Y \leq u) = 0{,}67$. Une recherche dans la table montre que $\mathbb{P}(Y \leq 0{,}44) = 0{,}67$.

On remarque que $Y \leq 0{,}44$ est équivalent à $2Y + 2 \leq 2{,}88$ et donc que $X \leq 2{,}88$ est équivalent à $Y \leq 0{,}44$. De ce fait $\mathbb{P}(X \leq 2{,}88) = 0{,}67$ et donc $\mathbb{P}(X \geq 2{,}88) = 0{,}33$, ce qui conduit à prendre $t = 2{,}88$.

Exercice 4 (*sur 4 points*)

Question 1 F doit

1. être continue,
2. être croissante,
3. et avoir pour les limites $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

La condition 3 sur les limites est clairement respectée. Pour la continuité, on remarque que F est continue sur chacun des quatre intervalles (car c'est à chaque fois une fonction affine). De plus $\lim_{x\to-1} a(x+1) = 0$ (par continuité) soit la valeur $F(-1)$. Donc F est continue en -1. De même $\lim_{x\to 0} bx + a = a$, soit la valeur de $F(0)$. Donc F est continue en 0.

Enfin, $F(1) = a + b$ alors que $\lim_{x\to 1} 1 = 1$. On doit donc avoir $a + b = 1$ pour garantir la continuité de F.

Comme la fonction doit être croissante, il faut de plus que $a \geq 0$ et $b \geq 0$. En effet la dérivée de F sur $]-1{,}0[$ est $f'(x) = a$ et F est donc croissante si et seulement si $a \geq 0$. De même la dérivée de F sur $]0{,}1[$ est b et F est croissante si et seulement si $b \geq 0$.

Question 2 On a $\mathbb{P}(X \leq 0{,}5) = F(0{,}5) = \frac{5}{8} = \frac{b}{2} + a$. Comme $a + b = 1$, $a = 1 - b$. En remplaçant a par cette valeur dans l'équation précédente, on a $\frac{5}{8} = \frac{b}{2} + 1 - b$, soit $b = \frac{3}{4}$ et $a = \frac{1}{4}$.

Question 3 Pour calculer $\mathbb{E}(X)$, on détermine d'abord la densité f de X, soit la dérivée de F. On a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in]-1, 0], \\ \frac{3}{4} & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} x f(x) dx + \int_{-1}^{0} x f(x) dx + \int_{0}^{1} x f(x) dx + \int_{1}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{x}{4} dx + \int_{0}^{1} \frac{3x}{4} dx && \text{par nullité de } f \\
&= \left[\frac{x^2}{8}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3x^2}{8}\right]_{0}^{1} && \text{car } \frac{x^2}{2} \text{ est une primitive de } x \\
&= -\frac{(-1)^2}{8} + 3\frac{(1)^2}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$