L2 sciences économiques **Année universitaire 2013 – 2014**
Université Paris 1

Partiel de statistiques
Mardi 29 avril – Durée 2 heures
Correction du sujet 1

Exercice 1 (*2 points*)

Question 1 On cherche $\mathbb{P}(0 \leq R \leq 4/3)$. Du fait des propriétés générales des proba et de la continuité de la variable aléatoire R :

$$\mathbb{P}(0 \leq R \leq 4/3) = \mathbb{P}(R \leq 4/3) - \mathbb{P}(R < 0) = \mathbb{P}(R \leq 4/3) - \mathbb{P}(R \leq 0)$$

On procède en centrant et réduisant R, avec $Z = \frac{R-m}{\sigma}$, et $Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$ par construction. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(R \leq 0) = \mathbb{P}(\frac{R-m}{\sigma} \leq \frac{-m}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z \leq \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}) = F_Z(-\frac{4}{3})$$

Comme la loi normale centrée réduite est symétrique par rapport à 0, on a :

$$F_Z(-\frac{4}{3}) = 1 - F_Z(\frac{4}{3})$$

D'où, après lecture dans les tables, $\mathbb{P}(R \leq 0) \simeq 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$
Il nous reste donc à déterminer $\mathbb{P}(R \leq 4/3)$, on procède en centrant et réduisant R :

$$\mathbb{P}(R \leq 4/3) = \mathbb{P}(\frac{R - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}) \leq 4/3) = \mathbb{P}(Z \leq 4/3) = F_Z(4/3) \simeq 0{,}9082$$

On a donc $\mathbb{P}(0 \leq R \leq 4/3) \simeq 0{,}9082 - 0{,}0918 \simeq 0{,}8164$.

Question 2 On cherche r tel que $\mathbb{P}(R \geq r) = 0{,}10$. Or du fait de la continuité de R et des propriétés des proba., on a

$$\mathbb{P}(R \geq r) = \mathbb{P}(R > r) = 1 - \mathbb{P}(R \leq r)$$

On cherche donc r tel que $\mathbb{P}(R \leq r) = 0{,}90$. On centre et on réduit la variable R en posant $Z = \frac{R-m}{\sigma}$ avec m son espérance et σ son écart-type. On obtient :

$$\mathbb{P}(R \leq r) = \mathbb{P}(\frac{R-m}{\sigma} \leq \frac{r-m}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z \leq \frac{r-m}{\sigma}) = 0{,}90$$

Par construction, $Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$ et par définition des fonctions de répartition $\mathbb{P}(Z \leq \frac{r-m}{\sigma}) = F_Z(\frac{r-m}{\sigma})$. On lit dans les tables statistiques de la loi normale centrée réduite la valeur de $\frac{r-m}{\sigma}$ correspondant à une valeur pour F_Z de 0,90, soit environ 1,28. On a donc :

$$\frac{r-m}{\sigma} = \frac{r - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \simeq 1{,}28$$

D'où, après calcul :

$$r \simeq \frac{1}{2} \times 1{,}28 + \frac{2}{3} = 0{,}64 + 2/3 \simeq 1{,}31$$

En conclusion, l'investisseur à 10 % de chances de gagner au moins 1,31 millions d'euros.

Exercice 2 (*4 points*)

Question 1 On cherche $\mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 0)$. Or $\mathbb{P}(Y \mid X = 0)$ est une probabilité (propriétés du conditionnement), donc on a (propriétés des proba) :

$$\mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 0) - \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{1}{3}$$

De la même manière pour $\mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 0)$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 5) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 5) - \mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 5) = \frac{1}{6}$$

Question 2 Depuis l'énoncé, on a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 5)$, or par propriété fondamentale des probabilités, leur somme doit être égale à 1, d'où :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{2}$$

Ce qui donne la loi de X.
On cherche ensuite la loi jointe du couple, c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y = y, X = x)$ avec $x = 0$ ou $x = 5$. Or dans le cas général, on a (définition des proba. conditionnelles) :

$$\mathbb{P}(Y = y, X = x) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)$$

D'où à partir des résultats précédents ou de l'énoncé :
$\mathbb{P}(Y = -10, X = 0) = \mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 0)\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(Y = 0, X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 0)\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
$\mathbb{P}(Y = 10, X = 0) = \mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 0)\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
et
$\mathbb{P}(Y = -10, X = 5) = \mathbb{P}(Y = -10 \mid X = 5)\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
$\mathbb{P}(Y = 0, X = 5) = \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 5)\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(Y = 10, X = 5) = \mathbb{P}(Y = 10 \mid X = 5)\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
Résumée dans le tableau, la loi jointe (X,Y) est donc :

$\mathbb{P}(X = x,Y = y)$	$x = 0$	$x = 5$	$\mathbb{P}(Y = y)$
$y = -10$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	
$y = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	
$y = 10$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(1)

La loi marginale de Y est par définition pour un y donné : $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x,Y = y)$. D'où après calcul (tableau) :

$$\mathbb{P}(Y = -10) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y = 10) = \frac{1}{3}$$

Question 3 Pour calculer la covariance, on utilise la formule :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

On calcule les espérances dans un premier temps, dont la formule générale est la suivante :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z = z)$$

D'où :

$$\mathbb{E}(X) = 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{-10 \cdot 1}{3} + 0 + \frac{10 \cdot 1}{3} = 0$$

Par ailleurs :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

D'où

$$\mathbb{E}(XY) = 5 \cdot (-10)\frac{1}{12} + 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

D'où :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{25}{6} - 0 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$$

Donc $cov(X,Y) \neq 0$ et on sait que $cov(X,Y) \neq 0 \Rightarrow$ X et Y pas indépendantes (la réciproque n'étant pas vraie). Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 (*6 points*)

Question 1 En choisissant arbitrairement de mettre le dé à 4 faces en premier, le résultat d'un lancer est un élément de l'ensemble

$$L = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

avec $|L| = 4 \times 8 = 32$. L'univers est alors

$$\Omega = L^5,$$

et donc $|\Omega| = 32^5 = 2^{25}$. Cette modélisation suppose que les lancers sont ordonnés, ce qui est clair dans l'énoncé. On prend pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme car les dés ne sont pas truqués. On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{2^{25}}$.

Question 2 Soit A l'évènement « obtenir au moins une fois une valeur supérieure ou égale à 11 ». On étudie $\overline{A}$ qui correspond à ne jamais obtenir une valeur supérieure ou égale à 11. Il est clair que

$$\overline{A} = (L \setminus \{(4, 8), (3, 8), (4, 7)\})^5,$$

car les couples $(4, 8)$, $(3, 8)$ et $(4, 7)$ sont les seuls qui donnent une somme supérieure ou égale à 11. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{29}{32}\right)^5 \simeq 0.3887.$$

Question 3 Soit B l'évènement « obtenir exactement un double 4 ». On décompose cet évènement en fonction du lancer qui correspond au double 4, soit donc

$$B = B_1 \cup ... \cup B_5,$$

où B_k est l'évènement « obtenir un double 4 au tirage k et dans aucun des autres tirages ». Il est clair que les B_k sont disjoints. Il est clair aussi qu'ils sont de même taille par symétrie. On a donc $|B| = 5|B_1|$. Or

$$B_1 = \{(4,4)\} \times (L \setminus \{(4,4)\})^4,$$

et donc $|B_1| = 31^4$. On a donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5 \times 31^4}{32^5} \simeq 0{,}1376.$$

Question 4 Il suffit de trouver un élément de $A \cap B$, soit par exemple 5 tirages dont le premier est $(4,4)$ et le second $(4,8)$, et dont aucun tirage du troisième au cinquième n'est (4,4). Par exemple :

$$\big((4{,}4), (4{,}8), (1{,}1), (1{,}1), (1{,}1)\big)$$

Comme $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, le fait que $A \cap B \neq \emptyset$ et que la probabilité est uniforme impliquent que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$ et donc que $\mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Question 5 L'évènement $D = \overline{A} \cap B$ correspond à obtenir exactement un double 4 et aucune valeur supérieure ou égale à 11. On peut le décomposer en D_1 jusqu'à D_5, où D_k est l'évènement dans lequel le double 4 est en position k. Ces évènements sont disjoints et par symétrie ont tous le même cardinal. On a de plus

$$D_1 = \{(4,4)\} \times (L \setminus \{(4{,}4), (4,8), (3,8), (4,7)\})^4,$$

et donc $|D_1| = 29^4$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(D) = \frac{5 \times 28^4}{32^5} \simeq 0{,}0916.$$

Question 6 L'évènement recherché (celui d'une victoire) est l'union de A et de B (car soit la première condition s'applique soit la deuxième, non exclusivement). Or d'après la propriété rappelée $A \cup B = (\overline{A} \cap B) \cup A$ et cette union est disjointe. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A),\\ &= \frac{5 \times 28^4}{32^5} + 1 - \left(\frac{29}{32}\right)^5,\\ &\simeq 0{,}4803.\end{aligned}$$

Exercice 4 (*5 points*)

Question 1 Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de manches remportées quand on enchaîne 5 manches de jeu. X est une binomiale de paramètres 5 et p les manches sont indépendantes et la probabilité de victoire d'une manche est constante (et égale à p). On a alors :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3 = 10\frac{1}{2^5} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Le nombre moyen de manches gagnées est $\mathbb{E}(X) = 5p = \frac{5}{2}$.

Question 2 On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de manches jouées jusqu'à en remporter une. Pour les raisons expliquées au dessus (indépendance et probabilité de gain constante), Y suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq 3) &= \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(Y=3), \\
&= p + (1-p)p + (1-p)^2 p, \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\
&= \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

Le nombre moyen de manches jouées est alors $E(Y) = \frac{1}{p} = 2$.

Question 3 Il est clair que $Z = 2X - 5$. En effet, on gagne 2 € par manche remportée et on paye 5 € pour jouer les 5 manches. On en déduit alors que

$$Z(\Omega) = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\},$$

car $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Comme $X = \frac{Z+5}{2}$ et $\mathbb{P}(X = x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{(5-x)}$, on en déduit que pour tout $z \in Z(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = z) &= \binom{5}{\frac{z+5}{2}} p^{\frac{z+5}{2}} (1-p)^{5 - \frac{z+5}{2}}, \\
&= \binom{5}{\frac{z+5}{2}} \frac{1}{2^5}.
\end{aligned}$$

L'espérance de Z est obtenue par linéarité en écrivant que

$$\mathbb{E}(Z) = 2\mathbb{E}(X) - 5 = 10p - 5 = 0,$$

ce qui utilise le fait que $\mathbb{E}(X) = 5p$.

Question 4 On représente W comme une variable aléatoire fonction de Y grâce à la fonction g définie par

$$g(y) = \begin{cases} 5 - y + 2 & \text{si } y \leq 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, chaque partie jouée coût 1 €, alors que la dernière partie rapporte 2 €. Si on peut jouer y partie, on a donc un gain net de $2 - y$, ce qui nous donne une somme totale de $5 + 2 - y$. Mais on ne peut pas jouer plus de 5 parties, donc dès que $y \geq 6$, W est nulle car on a épuisé les 5 € initiaux.

Question 5 On déduit de $W = g(Y)$ que

$$W(\Omega) = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Pour calculer la loi de W, on voit que pour $w \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $\{W = w\} = \{Y = 7 - w\}$, soit donc

$$\mathbb{P}(W = w) = \mathbb{P}(Y = 7 - w) = (1-p)^{(6-w)} p = \frac{1}{2^{7-w}}.$$

On constate aussi que $\{W = 0\} = \{Y \geq 6\}$ et donc que

$$\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(Y \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 5) = (1-p)^5 = \frac{1}{2^5}.$$

Exercice 5 (*3 points*)

Question 1 La densité de X, notée f_X, est donnée par la dérivée de la fonction de répartition de X. On a donc avec application des dérivées usuelles (fonction puissance) :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}[\\ 3 & \text{si } x \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\\ 0 & \text{si } x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Question 2 Par définition, et, du fait de la continuité de X

$$\mathbb{P}(X \in]\frac{1}{4},\frac{5}{8}[) = \mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{5}{8}) = \mathbb{P}(\frac{1}{4} < X \leq \frac{5}{8}).$$

Or

$$\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X \leq \frac{5}{8}) = \mathbb{P}(X \leq \frac{5}{8}) - \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{4})$$

Or $\frac{1}{4} \in [0,\frac{1}{2}[$ et $\frac{5}{8} \in [\frac{1}{2},\frac{3}{3}[$, donc :

$$\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{4}) = F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

et

$$\mathbb{P}(X \leq \frac{5}{8}) = F(\frac{5}{8}) = 3\frac{5}{8} - \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq X < \frac{5}{8}) = F(\frac{5}{8}) - F(\frac{1}{4}) = \frac{7}{16}$$

Question 3 L'espérance est donnée par $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$, d'où par la relation de Chasles :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-2t)tdt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 3tdt + \int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} 0tdt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (t - 2t^2)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 3tdt$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = [\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3]_0^{\frac{1}{2}} + [\frac{3}{2}t^2]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{49}{96}$$