L2 sciences économiques **Année universitaire 2014 – 2015**

Université Paris 1

Partiel de statistiques
Mardi 5 mai – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions, sans évaluer les fonctions usuelles comme exp (aussi noté e) ou ln. Si les notations C_n^p, A_n^p et/ou $\binom{n}{p}$ sont utilisées, leurs définitions en fonction de la factorielle devront être rappelées.

Exercice 1 (*8 points*)

On étudie une urne contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5. On tire dans cette urne deux jetons, successivement et sans remise.

Question 1 Donner l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ de l'expérience aléatoire.

On définit les deux variables aléatoires X et Y de la façon suivante. X vaut 1 si on obtient au moins un numéro pair sur l'un des deux jetons tirés et 0 sinon. Y vaut la valeur absolue de la différence entre les numéros des deux jetons. Par exemple, si on tire d'abord le jeton 2 puis le jeton 3, X vaut alors 1 (car 2 est pair) et Y vaut 1 (c'est-à-dire $|2-3|$).

Question 2 Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Question 3 Donner la loi jointe du couple (X, Y). Pour simplifier le calcul de la loi jointe, il est vivement conseillé de construire pour chaque variable un tableau donnant la **valeur** prise par la variable en fonction du résultat du tirage.

Question 4 Donner les lois marginales de X et Y.

Question 5 Démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Question 6 Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 0$.

Exercice 2 (*3,5 points*)

Un fabricant produit de fausses pièces en métal pour un jeu de société. Il annonce au concepteur du jeu que le diamètre des pièces produites suit une loi normale de moyenne $\mu = 2$ cm et d'écart-type $\sigma = 0{,}1$ cm.

Question 1 Le concepteur du jeu a prévu une boîte de diamètre 2,2 cm. Calculer le pourcentage des pièces produites par le fabricant qui ne pourront pas rentrer dans la boîte. On supposera qu'une pièce de diamètre inférieur ou égal à 2,2 cm rentre dans la boîte.

Question 2 Le concepteur du jeu souhaite qu'au moins 90 % des pièces aient un diamètre compris entre 1,9 cm et 2,1 cm. Est-ce le cas ?

Question 3 Déterminer un intervalle de la forme $[2-t, 2+t]$ tel que 90 % des pièces aient un diamètre appartenant à l'intervalle.

Exercice 3 (*6 points*)

Dans cet exercice, on pourra, si nécessaire*, utiliser les valeurs approchées suivantes :* $e^{-4} \simeq 0{,}02$, $e^{-2} \simeq 0{,}14$, $e^{-1} \simeq 0{,}37$, $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}61$, $e^{-\frac{1}{4}} \simeq 0{,}78$, $e^{\frac{1}{4}} \simeq 1{,}28$, $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1{,}65$, $e \simeq 2{,}71$, $e^2 \simeq 7{,}39$, $e^4 \simeq 54{,}60$.

Un investisseur s'intéresse aux créations d'entreprises innovantes. La durée d'activité d'une telle entreprise est modélisée par une variable aléatoire continue, D, qui est supposée suivre une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. D est mesurée en années. La durée de vie moyenne de ces entreprises est de 4 ans.

Question 1 Déterminer le paramètre λ de la loi suivie par D.

Question 2 Calculer la probabilité qu'une entreprise de ce type ait une durée de vie inférieure (ou égale) à 4 ans.

L'investisseur envisage le plan financier suivant : il investit un million d'euros dans une entreprise innovante qui se crée et au bout d'un an touche 1,7 millions d'euros en récupérant l'argent investi et des dividendes de 700 000 euros, à condition que l'entreprise soit encore en activité. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'entreprise n'est plus en activité, l'investisseur perd l'intégralité de l'argent investi.

Question 3 Soit S la variable aléatoire qui vaut 1 si l'entreprise considérée est encore en activé au bout d'un an et 0 sinon. Donner la loi usuelle suivie par S en précisant la (les) valeur(s) de son (ou ses) paramètre(s).

Question 4 Soit M la variable aléatoire donnant le montant que l'investisseur touche au bout d'un an, exprimé en millions d'euros. Exprimer M comme une fonction de S.

Question 5 Calculer l'espérance et la variance de M.

L'investisseur cherche à établir s'il ne serait pas plus judicieux de prêter moins d'argent mais à plusieurs entreprises. Il considère le cas où il investit 200 000 euros dans 5 entreprises différentes avec des dividendes de 140 000 euros au bout d'un an (selon un schéma similaire à celui des questions précédentes). En d'autres termes, pour chaque entreprise l'investisseur peut soit récupérer 340 000 euros si l'entreprise est encore en activité au bout d'un an, soit ne rien récupérer du tout. Les défaillances des entreprises sont considérées indépendantes.

Question 6 Soit A la variable aléatoire du nombre d'entreprises encore en activité au bout d'un an parmi les 5 dans lesquelles l'investisseur a placé son argent. Déterminer la loi de A et préciser la (les) valeur(s) de son (ou ses) paramètre(s).

Question 7 Calculer la probabilité qu'une seule entreprise (parmi les 5) soit encore en activité au bout d'un an.

Question 8 Soit N la variable aléatoire donnant le total que l'investisseur touche au bout d'un an, exprimé en millions d'euros. Calculer l'espérance et la variance de N.

Question 9 En comparant les espérances et les variances de M et N, notamment au travers du ratio des variances, $\frac{\mathbb{V}(M)}{\mathbb{V}(N)}$, déterminer le plan d'investissement qui paraît le plus judicieux.

Exercice 4 (*3 points*)

Soit f la fonction définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ \frac{e^x}{e-1} & \text{si } \ x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } \ x > a \end{cases}$$

Avec e défini comme le réel tel que $e = e^1$ et $ln(e) = 1$, $e \simeq 2{,}71$, et a un nombre réel quelconque.

Question 1 Déterminer a de sorte que f soit la densité d'une variable aléatoire absolument continue.

Question 2 Soit X une variable aléatoire de densité f (donc avec pour a la valeur calculée à la question précédente). Déterminer F_X la fonction de répartition de X.

Question 3 Calculer l'espérance de X. On pourra s'appuyer sur le calcul de la dérivée de la fonction $g(x) = xe^x - e^x$ pour obtenir une primitive utile pour le calcul de $\mathbb{E}(X)$.

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1, \ldots, n\}$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X = 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0, \ldots, n\}$	$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3, \ldots, \}$	$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ $F(k) = 1 - (1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$